**Zadanie laboratoryjne** (za 10 punktów)

termin: 13 czerwca 2020

Dla danych równoodległych punktów $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le b$ definiujemy na przestrzeni funkcji rzeczywistych (semi-) iloczyn skalarny jako

$$\langle g, h \rangle = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} g(x_k)\, h(x_k). \tag{1}$$

Dla $n \le m$ należy:

- Obliczyć współczynniki $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$, $\{\gamma_k\}_{k=2}^{n}$ definiujące ciąg wielomianów $\{p_k\}_{k=0}^{n}$ ortogonalnych względem iloczynu skalarnego (1), zgodnie z formułą trójczłonową

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= (x - \beta_1), \\ p_k(x) &= (x - \beta_k)\, p_{k-1}(x) - \gamma_k\, p_{k-2}(x), \qquad k = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Następnie, dla danej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ narysować wykres $f$ oraz wielomianu $w_{n,f}$ stopnia $\le n$ najlepiej aproksymującego tą funkcję względem (semi-) normy

$$\|g\| = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |g(x_k)|^2},$$

oraz obliczyć $\|f - w_{n,f}\|$.

Wartości wielomianu $w_{n,f}$ należy obliczać w czasie liniowym w $n$ korzystając z $\beta_k$ i $\gamma_k$ w następujący sposób. Jeśli

$$w_{n,f} = \sum_{k=0}^{n} c_k\, p_k$$

to $w_{n,f}(x) = d_0$ gdzie $d_0$ obliczone jest według następującego wzoru rekurencyjnego: $d_{n+2} = 0$, $d_{n+1} = 0$, oraz

$$d_k = c_k + (x - \beta_{k+1}) d_{k+1} - \gamma_{k+2} d_{k+2} \qquad \text{dla} \quad k = n, n-1, \ldots, 0.$$

Zaobserwuj zachowanie się błędu aproksymacji przy rosnącym $n$.