Zadania domowe

(termin: 22 czerwca 2018)

Zadanie 16.
Niech $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie naturalną funkcją sklejaną pierwszego rzędu opartą na węzłach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Wykaż, że s można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$s(x) = a + \sum_{j=0}^{n} c_j |x - x_j|$$

dla pewnych a i c_j, $0 \leq j \leq n$, przy czym $\sum_{j=0}^{n} c_j = 0$.

Zadanie 17.
Znajdź węzeł $a \in [0, 1)$ oraz współczynniki α i β tak, aby kwadratura

$$Q(f) \;=\; \alpha f(a) + \beta f(1)$$

przybliżająca całkę $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ miała największy rząd.

Zadanie 18.
Czy istnieje kwadratura postaci $Q(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1)$ dla całki

$$f \mapsto \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x,$$

która jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia ≤ 3? Jeśli tak to wskaż x_0, x_1 i a_0, a_1.

Zadanie 19.
Niech $\hat{T}_n(f)$ będzie złożoną kwadraturą trapezów dla aproksymacji całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, opartą na równomiernym podziale odcinka $[a, b]$ na n pododcinków. Niech

$$\hat{Q}_n(f) \;=\; \hat{T}_n(f) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big).$$

Wykaż, że jeśli $f \in C^4([a, b])$ to błąd kwadratury $|I(f) - \hat{Q}_n(f)|$ zbiega do zera co najmniej tak szybko jak n^{-4} gdy $n \to \infty$.

Zadanie 20.
Zaproponuj metodę iteracyjną obliczania $1/a$ dla dowolnego $a > 0$ nie używającą dzielenia. Jak wybrać przybliżenie początkowe, aby metoda była zbieżna? Jaki jest wykładnik zbieżności?
(Wskazówka: zastosuj metodę Newtona do funkcji $f(x) = 1/x - a$.)