Zadania domowe 11-15

(termin: 25 maja 2018)

Zadanie 11

Funkcję $f(x) = x^4$ interpolujemy wielomianem Hermite'a w dwóch podwójnych węzłach: $x = 0$ i $x = 1$.

(a) Wyznacz wielomian interpolacyjny w odpowiedniej bazie Newtona.

(b) Uzasadnij, że dla każdego $x \in [0, 1]$ błąd interpolacji można oszacować przez $\frac{1}{16}$.

Zadanie 12.

Wykaż, że dla funkcji $f(x) = x^n$ i dowolnych punktów x_j, $0 \le j \le k$, różnica dzielona

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad k \ge n+1, \\ 1 & \text{jeśli} \quad k = n, \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_k & \text{jeśli} \quad k = n-1. \end{cases}$$

Zadanie 13.

Niech $[a, b]$ będzie przedziałem skończonym nie zawierającym zera. Dla danego $c \in \mathbb{R}$, niech

$$\widetilde{\Pi}_n \ = \ \{\, w \in \Pi_n : \ w(0) = c \,\}.$$

Wskaż w $\widetilde{\Pi}_n$ wielomian o najmniejszej normie jednostajnej na $[a, b]$. Ile wynosi jego norma? Jakie będzie rozwiązanie gdy $0 \in [a, b]$?

Zadanie 14.

Znajdź wielomian stopnia nie większego niż 1 najlepiej aproksymujący funkcję $f(x) = \sqrt{x}$

(i) w normie jednostajnej $C([0, 1])$,

(ii) w normie średniokwadratowej $\mathcal{L}_2([0, 1])$.

Zadanie 15.

Przeprowadzając ortogonalizację Grama-Schmidta bazy potęgowej $\{1, x, x^2, x^3\}$ znajdź wielomiany ortogonalne Legendre'a stopnia $0, 1, 2, 3$, tzn. wielomiany ortogonalne na przedziale $[-1, 1]$ z wagą $\rho \equiv 1$. Następnie wskaż zera tych wielomianów.