Zadania domowe 6-10

(termin: 23 kwietnia 2018)

Zadanie 6.
Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -17 \\ -4 & -17 & -20 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa i symetryczna, ale *nie jest* dodatnio określona. Znajdź, jeśli istnieją, macierz trójkątną dolną L z jedynkami na głównej przekątnej oraz macierz diagonalną D takie, że $A = LDL^T$. Czy taki rozkład istnieje dla dowolnej nieosobliwej i symetrycznej macierzy A?

Zadanie 7.
Do nieosobliwej macierzy trójdiagonalnej $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{C}^{n,n}$, tzn. takiej, że $a_{i,j} = 0$ dla $|i - j| \geq 2$, zastosowano algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie otrzymując rozkład trójkątno-trójkątny $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, $L = (l_{i,j})$ macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej i $|l_{i,j}| \leq 1$, a $U = (u_{i,j})$ macierzą trójkątną górną. Wykaż, że

$$\max_{1\leq i,j\leq n} |u_{i,j}| \leq 2 \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|.$$

Zadanie 8.
Stosując odbicia Householdera $H_i = I - \vec{u}_i\vec{u}_i^T/\gamma_i$ sprowadź macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci trójkątnej górnej $R = H_2H_1A$. Wskaż współczynniki macierzy R oraz odpowiednie wektory $\vec{u}_i$ i liczby γ_i, $i = 1, 2$.

Następnie, korzystając z rozkładu, znajdź

$$\min_{\vec{x}} \|\vec{b} - A\vec{x}\|_2$$

dla $\vec{b} = [-4, 1, -3, 4]^T$. Jaki wektor realizuje powyższe minimum?

Zadanie 9.
Wykaż, że dla danej nieosobliwej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ rozkład ortogonalno-trójkątny jest jednoznaczny z dokładnością do znaków, tzn. Jeśli $A = Q_1R_1$ i $A = Q_2R_2$ to $Q_2 = Q_1D$, gdzie

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n), \quad d_i \in \{+1, -1\}.$$

Zadanie 10.
Wykaż, że algorytm Hornera obliczania wartości $w(\xi)$ wielomianu danego w postaci potęgowej,

$v_n := a_n;$
for $j := n-1$ **downto** 0 **do**
$v_j := v_{j+1} * x + a_j;$

jest jednocześnie algorytmem dzielenia tego wielomianu przez jednomian $(x-\xi)$. Dokładniej, jeśli $w(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ to

$$w(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j x^{j-1}\right)(x-\xi) + v_0.$$