Zadania domowe 1-5

(termin: 23 marca 2018)

Zadanie 1.
Niech $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Czy z punktu widzenia błędów w fl_ν lepiej jest policzyć sumę tych liczb w kolejności od najmniejszej liczby do największej czy odwrotnie? Odpowiedź uzasadnij odpowiednią analizą błędów.

Zadanie 2.
Wykaż, że naturalny algorytm obliczania cosinusa kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)}},$$

jest numerycznie poprawny. Oszacuj wskaźnik uwarunkowania zadania i błąd względny wyniku w fl_ν.

Zadanie 3.
Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mamy

$$\|A\|_2 = \sup_{\vec{z}} \sup_{\vec{y}} \left|\vec{y}^T A \vec{z}\right|,$$

gdzie suprema są wzięte po $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ i $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ takich, że $\|\vec{z}\|_2 = 1 = \|\vec{y}\|_2$.

Stąd wywnioskuj, że $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$.

Zadanie 4.
Jeśli dla macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i wektora $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$(A + E)\vec{x} = \vec{b}, \qquad \text{gdzie} \quad \|E\|_2 \le K\,\nu\,\|A\|_2, \tag{1}$$

to dla residuum $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ mamy

$$\|\vec{r}\|_2 \le K\,\nu\,\|A\|_2\|\vec{x}\|_2. \tag{2}$$

Wykaż, że prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli spełniony jest warunek (2) to istnieje macierz E taka, że $\|E\|_2 \le K\nu\|A\|_2$ oraz spełniona jest nierówność (1).

Zadanie 5
Stosując (literalnie) algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie dokonaj rozkładu macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na iloczyn $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, L macierzą trójkątną dolną z jedynkami na głównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną.