TWIERDZENIE O ALTERNANSIE

Niech $X = C([a,b])$, gdzie $-\infty < a < b < +\infty$, będzie przestrzenią funkcji ciągłych określonych na odcinku $[a,b]$ z normą

$$\|f\| = \|f\|_{C([a,b])} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|.$$

Niech V_n będzie $(n+1)$-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni X. Element $v_n^* \in V_n$ nazywamy *optymalnym* dla $f \in X$ jeśli

$$\|f - v_n^*\| = \inf_{v_n\in V_n} \|f - v_n\| =: \mathrm{dist}(f, V_n).$$

Definicja 1. *Podprzestrzeń liniowa $V_n \subset X$ wymiaru $n+1$ jest przestrzenią Haara (albo spełnia warunek Haara) gdy każda nietrywialna funkcja $f \in V_n$ znika w co najwyżej n różnych punktach.*

Oczywiście, przestrzeń Π_n wielomianów algebraicznych jednej zmiennej stopnia co najwyżej n jest przestrzenią Haara na każdym odcinku $[a,b]$.

Twierdzenie 2 (o alternansie)**.** *Niech V_n będzie przestrzenią Haara. Element $v_n \in V_n$ jest optymalny dla $f \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją punkty*

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} \leqslant b$$

oraz $s \in \{-1, +1\}$ takie, że

$$f(x_i) - v_n(x_i) = s(-1)^i\|f - v_n\| \quad dla \quad i = 0, 1, \ldots, n, n+1.$$

Dowód. Dowód wystarczalności jest stosunkowo prosty. Niech, bez zmniejszenia ogólności, $s = 1$. Załóżmy, że istnieje funkcja $w_n \in V_n$ taka, że $\|f - w_n\| < \|f - v_n\|$. Wtedy dla parzystych i mamy $(f - w_n)(x_i) < (f - v_n)(x_i)$, a dla nieparzystych i nierówność odwrotną. To zaś oznacza, że funkcja

$$(f - w_n) - (f - v_n) = v_n - w_n$$

zeruje się w każdym z podprzedziałów (x_i, x_{i+1}), $0 \leqslant i \leqslant n$. Ale $v_n - w_n$ jest elementem $(n+1)$-wymiarowej przestrzeni Haara V_n. Jeśli zmienia znak w $n+1$ różnych punktach to musi być elementem zerowym, czyli $w_n = v_n$.

Dowód konieczności w ogólnym przypadku jest dużo trudniejszy. Tutaj pokażemy go jedynie w szczególnym przypadku gdy $V_n = \Pi_n$.

Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $f \notin \Pi_n$. Niech v_n^* będzie elementem optymalnym dla f. Ponieważ f jest ciągła na $[a,b]$, oba zbiory

$$\begin{aligned} Z_+ &:= \{x \in [a,b] : (f - v_n^*)(x) = \|f - v_n^*\|\}, \\ Z_- &:= \{x \in [a,b] : (f - v_n^*)(x) = -\|f - v_n^*\|\}, \end{aligned}$$

są niepuste, rozłączne i zwarte. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $\inf Z_- < \inf Z_+$.

Niech $x_0 = \inf Z_-$ i dalej indukcyjnie dla $j = 1, 2\ldots$

$$x_{2j-1} = \inf\{x \in Z_+ : x \geqslant x_{2j-2}\}, \qquad x_{2j} = \inf\{x \in Z_- : x \geqslant x_{2j-1}\},$$

aż do momentu gdy wybraliśmy $n+2$ punkty albo wybór kolejnego punktu nie jest możliwy.

Jeśli wybraliśmy w ten sposób $n+2$ punkty to one tworzą alternans. Załóżmy więc, że wybraliśmy tylko $k+1 \leqslant n+1$ punktów. Wtedy wybieramy dodatkowo punkty y_j dla $1 \leqslant j \leqslant n$ w ten sposób, że:

$$\begin{aligned} &\sup\{x \in Z_- : x \leqslant x_j\} < y_j < x_j, && \text{jeśli } j \text{ nieparzyste,}\\ &\sup\{x \in Z_+ : x \leqslant x_j\} < y_j < x_j, && \text{jeśli } j \text{ parzyste,} \end{aligned}$$

po czym definiujemy wielomian $w \in \Pi_n$ jako

$$w(x) = (-1)^{n+1} \prod_{j=1}^{n} (x - y_j).$$

Pokażemy, że można dobrać $\lambda > 0$ tak, że

$$\|f - v_n^* - \lambda w\| < \|f - v_n^*\|, \tag{1}$$

co będzie sprzeczne z założeniem, że v_n^* jest optymalny.

Rzeczywiście, niech

$$\begin{aligned} \mathrm{Crit}(f) &= \{x \in [a,b] : |(f - v_n^*)(x)| = \|f - v_n^*\|,\\ A(f) &= \{x \in [a,b] : (f - v_n^*)(x) w(x) \leqslant 0\}. \end{aligned}$$

Oba zbiory są zwarte. Są też rozłączne, bowiem z konstrukcji wielomianu w wynika, że $(f - v_n^*)(x)$ i $w(x)$ mają ten sam znak dla wszystkich $x \in \mathrm{Crit}(f)$. Wobec tego

$$\delta := \|f - v_n^*\| - \sup\Big\{|(f - v_n^*)(x)| : x \in A(f)\Big\} > 0.$$

Definiujemy

$$\lambda := \frac{\min\Big(\delta, \|f - v_n^*\|\Big)}{2\|w\|}.$$

Jeśli teraz $x \in A$ to

$$\begin{aligned} |(f - v_n^*)(x) - \lambda w(x)| &\leqslant |(f - v_n^*)(x)| + \lambda |w(x)|\\ &\leqslant \|f - v_n^*\| - \delta + \delta/2 = \|f - v_n^*\| - \delta/2. \end{aligned}$$

Jeśli zaś $x \notin A$ to

$$|(f - v_n^*)(x) - \lambda w(x)| < \|f - v_n^*\|,$$

bowiem $(f - v_n^*)(x)$ i $\lambda w(x)$ mają wtedy ten sam znak, oraz $0 < |w(x)| \leqslant \|f - v_n^*\|$.

Ostatecznie mamy, że $|(f - v_n^* - \lambda w)(x)| < \|f - v_n^*\|$ na całym przedziale $[a,b]$, co wobec ciągłości funkcji $f - v_n^* - \lambda w$ implikuje (1). $\square$

Twierdzenie o alternansie implikuje, że wielomian optymalny v_n^* w Π_n dla funkcji $f \in C([a,b]$ jest wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Rzeczywiście, funkcja $f - v_n^*$ zmienia znak pomiędzy każdymi dwoma punktami alternansu. Ponieważ alternans liczy $n+2$ punkty to mamy $n+1$ różnych punktów x_i takich, że $f(x_i) = v_n^*(x_i)$.

Powyższa obserwacja w połączeniu z twierdzeniem Weierstrassa o gęstości przestrzeni wielomianów algebraicznych w $C([a,b])$ daje z kolei następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Dla każdej funkcji $f \in C([a,b])$ istnieją węzły*

$$a \leqslant x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant b, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

takie, że dla wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a $v_{n,f}$ opartych na tych węzłach

$$\lim_{n \to \infty} \|f - v_{n,f}\|_{C([a,b])} = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że w powyższym twierdzeniu kwantyfikatorów nie można zamienić, tzn. twierdzenie, że istnieją węzły $x_i^{(n)}$ takie, że mamy zbieżność dla każdej funkcji ciągłej nie jest prawdziwe. Wręcz przeciwnie, dla każdego wyboru węzłów znajdzie się funkcji ciągła taka, że błąd rozbiega do nieskończoności. Fakt ten wynika z ogólnych (dość głębokich) twierdzeń z teorii aproksymacji.