Zadania domowe

(termin: 13 czerwca 2017)

Zadanie 16.
Niech $[a, b]$ będzie przedziałem skończonym nie zawierającym zera. Dla danego $c \in \mathbb{R}$, niech

$$\widetilde{\Pi}_n \;=\; \{\, w \in \Pi_n :\; w(0) = c \,\}.$$

Wskaż w $\widetilde{\Pi}_n$ wielomian o najmniejszej normie jednostajnej na $[a, b]$. Ile wynosi jego norma? Jakie będzie rozwiązanie gdy $0 \in [a, b]$?

Zadanie 17.
Znajdź wielomian stopnia nie większego niż 1 najlepiej aproksymujący funkcję $f(x) = \sqrt{x}$
(i) w normie jednostajnej $C([0, 1])$,
(ii) w normie średniokwadratowej $\mathcal{L}_2([0, 1])$.

Zadanie 18.
Przeprowadzając ortogonalizację Grama-Schmidta bazy potęgowej $\{1, x, x^2, x^3\}$ znajdź wielomiany ortogonalne Legendre'a stopnia $0, 1, 2, 3$, tzn. wielomiany ortogonalne na przedziale $[-1, 1]$ z wagą $\rho \equiv 1$. Następnie wskaż zera tych wielomianówi, czyli węzły odpowiednich kwadratur Gaussa-Legendre'a.

Zadanie 19.
Znajdź węzeł c oraz współczynniki α i γ tak, aby kwadratura

$$Q(f) \;=\; \alpha f(a) + \gamma f(c)$$

przybliżająca całkę $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ miała największy rząd.

Zadanie 20.
Niech $\hat{T}_n(f)$ będzie złożoną kwadraturą trapezów dla aproksymacji całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, opartą na równomiernym podziale odcinka $[a, b]$ na n pododcinków. Niech

$$\hat{Q}_n(f) \;=\; \hat{T}_n(f) - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\big(f'(b) - f'(a)\big).$$

Wykaż, że jeśli $f \in C^4([a, b])$ to błąd kwadratury $|I(f) - \hat{Q}_n(f)|$ zbiega do zera co najmniej tak szybko jak n^{-4} gdy $n \to \infty$.