Zadania domowe 11-15

(termin: 26 maja 2017)

Zadanie 11.
Niech B będzie macierzą symetryczną 2×2 o dwóch różnych dodatnich wartościach własnych mniejszych od jedności. Do macierzy $A_1 = B - 4 * I$ i $A_2 = B + 20 * I$ zastosowano (zwykłą) metodę potęgową

$$\vec{x}_{k+1} = \frac{A_i \vec{x}_k}{\|A_i \vec{x}_k\|_2}$$

z wektorem początkowym $\vec{x}_0 \neq 0$ niebędącym wektorem własnym macierzy B otrzymując dwa ciągi, po jednym dla każdej z macierzy. Czy możemy być pewni, że ciąg $r_k = \vec{x}_k^T A_i \vec{x}_k$ jest zbieżny w obu przypadkach? Czy znając wartości obu granic (o ile istnieją) jesteśmy w stanie podać kosztem $\mathcal{O}(1)$ obliczeń w *fl* wartości własne macierzy B?

Zadanie 12.
Wykaż, że algorytm Hornera obliczania wartości $w(\xi)$ wielomianu danego w postaci potęgowej,

$v_n := a_n;$
for $j := n-1$ **downto** 0 **do**
$v_j := v_{j+1} * x + a_j;$

jest jednocześnie algorytmem dzielenia tego wielomianu przez jednomian $(x - \xi)$. Dokładniej, jeśli $w(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ to

$$w(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j x^{j-1} \right) (x - \xi) + v_0.$$

Zadanie 13
Funkcję $f(x) = x^4$ interpolujemy wielomianem Hermite'a w dwóch podwójnych węzłach: $x = 0$ i $x = 1$.

(a) Wyznacz wielomian interpolacyjny w odpowiedniej bazie Newtona.
(b) Uzasadnij, że dla każdego $x \in [0, 1]$ błąd interpolacji można oszacować przez $\frac{1}{16}$.

Zadanie 14.
Wykaż, że dla funkcji $f(x) = x^n$ i dowolnych punktów x_j, $0 \leq j \leq k$, różnica dzielona

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad k \geq n+1, \\ 1 & \text{jeśli} \quad k = n, \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_k & \text{jeśli} \quad k = n-1. \end{cases}$$

Zadanie 15.
Niech $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją sklejaną pierwszego stopnia (tzn. funkcją ciągłą i kawałkami wielomianem stopnia ≤ 1) opartą na węzłach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Wykaż, że s można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$s(x) = a + bx + \sum_{j=0}^{n} c_j |x - x_j|$$

dla pewnych a, b, c_j, $0 \leq j \leq n$.