

Zadania domowe 6-10

(termin: 28 kwietnia 2017)

Zadanie 6

Stosując (literalnie) algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie dokonaj rozkładu macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na iloczyn $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, L macierzą trójkątną dolną z jedynekami na głównej przekątnej, a U macierzą trójkątną górną.

Zadanie 7.

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 6 & 17 & -17 \\ -4 & -17 & -20 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa i symetryczna, ale *nie jest* dodatnio określona. Znajdź, jeśli istnieją, macierz trójkątną dolną L z jedynekami na głównej przekątnej oraz macierz diagonalną D takie, że $A = LDL^T$. Czy taki rozkład istnieje dla dowolnej nieosobliwej i symetrycznej macierzy A ?

Zadanie 8.

Do nieosobliwej macierzy trójdzielnej $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{C}^{n,n}$, tzn. takiej, że $a_{i,j} = 0$ dla $|i - j| \geq 2$, zastosowano algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie otrzymując rozkład trójkątno-trójkątny $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, $L = (l_{i,j})$ macierzą trójkątną dolną z jedynekami na przekątnej i $|l_{i,j}| \leq 1$, a $U = (u_{i,j})$ macierzą trójkątną górną. Wykaż, że

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} |u_{i,j}| \leq 2 \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Zadanie 9.

Stosując odbicia Householdera $H_i = I - \vec{u}_i \vec{u}_i^T / \gamma_i$ sprowadź macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci trójkątnej górnej $R = H_2 H_1 A$. Wskaż współczynniki macierzy R oraz odpowiednie wektory \vec{u}_i i liczby γ_i , $i = 1, 2$.

Następnie, korzystając z rozkładu, znajdź

$$\min_{\vec{x}} \|\vec{b} - A\vec{x}\|_2$$

dla $\vec{b} = [-4, 1, -3, 4]^T$. Jaki wektor realizuje powyższe minimum?

Zadanie 10.

Wykaż, że dla danej nieosobliwej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ rozkład ortogonalno-trójkątny jest jednoznaczny z dokładnością do znaków, tzn. Jeśli $A = Q_1 R_1$ i $A = Q_2 R_2$ to $Q_2 = Q_1 D$, gdzie

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), \quad d_i \in \{+1, -1\}.$$