Zadania domowe 1-5

(termin: 31 marca 2017)

Zadanie 1.
Zaproponuj metodę iteracyjną obliczania $1/a$ dla $a > 0$ nie używającą dzielenia. Jak wybrać przybliżenie początkowe, aby metoda była zbieżna? Jaki jest wykładnik zbieżności? (Wskazówka: zastosuj metodę Newtona do funkcji $f(x) = 1/x - a$.)

Zadanie 2.
Rozpatrzmy metodę iteracyjną daną wzorem

$$x_k \;=\; x_{k-1} - m\,\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma m-krotne zero x^* to metoda jest lokalnie zbieżna do x^* z wykładnikiem 2.

Zadanie 3.
Niech $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Czy z punktu widzenia błędów w fl_ν lepiej jest policzyć sumę tych liczb w kolejności od najmniejszej liczby do największej czy odwrotnie? Odpowiedź uzasadnij odpowiednią analizą błędów.

Zadanie 4.
Wykaż, że naturalny algorytm obliczania cosinusa kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) \;=\; \frac{\sum_{j=1}^n a_j b_j}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)}},$$

jest numerycznie poprawny. Oszacuj błąd względny wyniku w fl_ν.

Zadanie 5.
Jeśli dla macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i wektora $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$(A + E)\vec{x} = \vec{b}, \qquad \text{gdzie} \quad \|E\|_2 \le K\,\nu\,\|A\|_2, \tag{1}$$

to dla residuum $\vec{r} = \vec{b} - A\vec{x}$ mamy

$$\|\vec{r}\|_2 \le K\,\nu\,\|A\|_2\|\vec{x}\|_2. \tag{2}$$

Wykaż, że prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli spełniony jest warunek (2) to istnieje macierz E taka, że $\|E\|_2 \le K\nu\|A\|_2$ oraz spełniona jest nierówność (1).