Zadania domowe 6-10

(termin: 5 maja 2017)

Zadanie 6.
Do nieosobliwej macierzy Hessenberga $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{n,n}$, tzn. takiej, że $a_{i,j} = 0$ dla $i \geq j+2$, zastosowano algorytm eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie otrzymując rozkład trójkątno-trójkątny $PA = LU$, gdzie P jest macierzą permutacji, $L = (l_{i,j})$ macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej i $|l_{i,j}| \leq 1$, a $U = (u_{i,j})$ macierzą trójkątną górną. Wykaż, że

$$\left(\max_{1 \leq i,j \leq n} |u_{i,j}| \right) \leq n \left(\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \right).$$

Czy to oszacowanie można poprawić gdy dodatkowo $A = A^T$?

Zadanie 7.
Wykaż numeryczną poprawność eliminacji Gaussa bez przestawień wierszy/kolumn dla macierzy $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ z dominującą przekątną, tzn. gdy

$$2\,|a_{i,i}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Zadanie 8.
Stosując odbicia Householdera $H_i = I - \vec{u}_i \vec{u}_i^T / \gamma_i$ sprowadź macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci trójkątnej górnej $R = H_2 H_1 A$. Wskaż współczynniki macierzy R oraz odpowiednie wektory $\vec{u}_i$ i liczby γ_i, $i = 1, 2$. Następnie, korzystając z rozkładu, znajdź

$$\min_{\vec{x}} \|\vec{b} - A\vec{x}\|_2$$

dla $\vec{b} = [-4, 1, -3, 4]^T$. Jaki wektor realizuje powyższe minimum?

Zadanie 9.
Przedyskutuj zachowanie się metody potęgowej dla macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, jeśli jej wartości własne λ_i, $1 \leq i \leq n$, (uwzględniając krotności) spełniają

$$|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Zadanie 10.
Dla nieosobliwej macierzy nieosobliwej $A_0 \in \mathbb{R}^{n,n}$ wykonano jeden krok metody QR:

$$\begin{cases} A_0 := Q\,R & \text{(rozkład ortogonalno-trójkątny)} \\ A_1 := R\,Q \end{cases}$$

Wykaż, że jeśli A_0 jest symetryczna i trójdiagonalna to A_1 jest również symetryczna i trójdiagonalna.