ZADANIA 7.5

1. Sprawdzić, że (7.5.5) wynika z (7.5.4).
2. Wykazać, że druga kolumna tablicy (7.5.6) zawiera liczby, które daje złożony wzór Simpsona i że $R(3,3)$ nie jest związane z tym wzorem (jest to tzw. *wzór Milne'a*).
3. Metodą Romberga obliczyć $R(2,2)$ dla $\int_1^3 x^{-1}\,dx$.

ZADANIA KOMPUTEROWE 7.5

K1. Napisać procedurę realizującą metodę Romberga dla danej funkcji f i przedziału $[a,b]$. Parametrem procedury powinna być też liczba wierszy tablicy (7.5.6), które mają być obliczone. Sprawdzić procedurę dla całek:
(**a**) $\int_0^1 x^{-1}\sin x\,dx$, (**b**) $\int_{-1}^1(\cos x - e^x)/\sin x\,dx$, (**c**) $\int_1^\infty x^{-1}e^{-x}\,dx$.
Funkcję podcałkową należy obliczać tak, aby uniknąć utraty dokładności przy odejmowaniu bliskich liczb. W razie potrzeby trzeba skorzystać z relacji $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. W przypadku (c) przez odpowiednie przekształcenie zmiennej, np. $x = 1/t$, otrzymać przedział skończony całkowania. Obliczyć siedem wierszy tablicy (7.5.6).

7.6. Metody adaptacyjne całkowania

Istotą metod adaptacyjnych całkowania jest to, że własności funkcji podcałkowej w różnych częściach przedziału są automatycznie uwzględniane w obliczeniach; podobne metody aproksymacji naszkicowano w podrozdz. 6.14. Stosując taką metodę do obliczania całki

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

użytkownik podaje – w idealnym przypadku – tylko funkcję f, przedział całkowania $[a,b]$ i dopuszczalny błąd ε szukanej wartości. Natomiast sama metoda dzieli ten przedział na takie fragmenty, aby stosowanie w nich jakiejś klasycznej metody dało w sumie dostatecznie dokładny wynik.

Opiszemy teraz dokładniej typową metodę adaptacyjną. Założymy, że $f \in C^4[a,b]$, dzięki czemu można stosować wzór Simpsona (7.2.6) z błędem (7.2.7):

$$\int_u^v f(x)\,dx = S(u,v) - \frac{1}{2880}(v-u)^5 f^{(4)}(\xi), \tag{7.6.1}$$

gdzie

$$S(u,v) := \frac{1}{6}\left[f(u) + 4f\left(\frac{u+v}{2}\right) + f(v)\right], \quad \xi \in (u,v).$$

Jeśli w pewnym przedziale $[u, v]$ wzór Simpsona nie jest dostatecznie dokładny, to przedział dzielimy na połowy i tenże wzór stosujemy w każdej z nich. W razie potrzeby to postępowanie iterujemy aż do osiągnięcia odpowiedniej globalnej dokładności. Ostatecznie więc dochodzimy do równości

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} S(x_{i-1}, x_i) + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

gdzie e_i jest błędem przybliżenia $S(x_{i-1}, x_i)$ całki w odpowiednim podprzedziale. Jeśli

$$|e_i| \leqslant \varepsilon \frac{x_i - x_{i-1}}{b-a}, \tag{7.6.2}$$

to globalny błąd można oszacować tak:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} e_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |e_i| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Jeśli w pewnym przedziale $[u, v]$ wzór (7.6.1) jest za mało dokładny, to – jak już zapowiedziano – przedział dzielimy na połowy za pomocą punktu $w := (u+v)/2$ i w każdej z nich stosujemy ten sam wzór:

$$\begin{aligned}\int_u^v f(x)\,dx &= \int_u^w f(x)\,dx + \int_w^v f(x)\,dx = \\ &= S(u,w) + S(w,v) - \frac{1}{2880}(w-u)^5 f^{(4)}(\xi_1) - \frac{1}{2880}(v-w)^5 f^{(4)}(\xi_2) = \\ &= S(u,w) + S(w,v) - \frac{1}{46080}(v-u)^5 f^{(4)}(\xi'),\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

gdzie $\xi' \in (u, v)$. Ostatnia równość jest prawdziwa dzięki założonej ciągłości pochodnej $f^{(4)}$. W metodzie adaptacyjnej przyjmujemy, że zmienia się ona na tyle wolno, iż można ją uznać za stałą w dostatecznie małych przedziałach. To pozwala wyeliminować składniki z tą pochodną występujące w (7.6.1) i (7.6.3). W tym celu mnożymy drugą równość przez 16 i odejmujemy stronami pierwszą:

$$\int_u^v f(x)\,dx \approx S(u,w) + S(w,v) + \frac{1}{15}[S(u,w) + S(w,v) - S(u,v)] \tag{7.6.4}$$

(takie postępowanie znamy już z ekstrapolacji Richardsona).

Mamy teraz trzy przybliżenia tej całki: zapewne najgorsze $S(u, v)$, lepsze $S(u, w) + S(w, v)$ i najlepsze, czyli całą prawą stronę równości (7.6.4). Jej ostatni składnik jest z grubsza błędem przybliżenia $S(u, w) + S(w, v)$,

ale stosujemy go jako (na ogół przesadnie pesymistyczne) oszacowanie błędu całej prawej strony. Dlatego, zgodnie z (7.6.2), uznajemy, że to najlepsze przybliżenie jest dostatecznie dokładne, jeśli

$$|S(u,w) + S(w,v) - S(u,v)| \leqslant 15(v-u)/(b-a). \tag{7.6.5}$$

Znamy już pomysł zastosowany w metodzie adaptacyjnej. Obliczenia zaczynają się od przedziału $[a,b]$. Dla niego (i dla wszystkich podprzedziałów rozważanych dalej) zapamiętujemy w tzw. *stosie*, na początku pustym, następujący wektor o sześciu składowych:

$$v := (a, h, f(a), f(a+h), f(a+2h), S(a,b)), \quad \text{gdzie} \quad h := \tfrac{1}{2}(b-a). \tag{7.6.6}$$

Przybliżona wartość $S(a,b)$ całki wyraża się przez składowe od trzeciej do piątej tego wektora. Następnie obliczamy $c := a+h$, $S(a,c)$ i $S(c,b)$. Aby ocenić, czy można już zakończyć obliczenia, sprawdzamy nierówność (7.6.5) z a, b, c zamiast u, v, w. Jeśli jest ona spełniona, to sumę podobną do prawej strony (7.6.4) uznajemy za dostatecznie dobre przybliżenie wartości całki i kończymy obliczenia. W przeciwnym razie wektor (7.6.6) usuwamy ze stosu, a dołączamy doń dwa nowe wektory:

$$(a, h/2, f(a), f(y), f(c), S(a,c)), \quad \text{gdzie} \quad y := a + h/2,$$
$$(c, h/2, f(c), f(z), f(b), S(c,b)), \quad \text{gdzie} \quad z := c + h/2.$$

Zauważmy, że wymaga to obliczenia tylko dwóch nowych wartości funkcji, w punktach y i z.

W dalszym ciągu postępujemy podobnie, wystarczy zatem dodać tylko kilka informacji:

- W każdym momencie obliczeń stos zawiera dane tylko o tych podprzedziałach, w których jeszcze nie znaleziono dostatecznie dobrych przybliżeń całki.
- Dopóki stos nie jest pusty, algorytm bada przybliżenia całki w przedziale opisanym za pomocą ostatniego wektora.
- Użytkownik ustala maksymalną liczbę n wektorów na stosie; jej przekroczenie świadczy o niemożności obliczenia całki z wymaganą dokładnością.
- W algorytmie występuje zmienna $\mathfrak{S}$, której początkową wartością jest 0 i do której dodajemy każde nowe, dostatecznie dobre przybliżenie całki w badanym podprzedziale. W razie pomyślnego zakończenia obliczeń wartość tej zmiennej jest szukanym przybliżeniem dla całki $\int_a^b f(x)\,dx$.

Niżej podano algorytm zgodny z już podanymi informacjami. Przyjęto w nim, że stos zawiera wektory $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$; składowymi wektora $v^{(k)}$ są liczby $v_1^{(k)}, \ldots, v_6^{(k)}$.

input a, b, ε, n
$d \leftarrow b - a$; $\mathfrak{S} \leftarrow 0$; $h \leftarrow d/2$; $c \leftarrow (a+b)/2$; $k \leftarrow 1$
$A \leftarrow f(a)$; $B \leftarrow f(b)$; $C \leftarrow f(c)$
$S \leftarrow h(A + 4C + B)/3$
$v^{(1)} \leftarrow (a, h, A, C, B, S)$
while $1 \leqslant k \leqslant n$
    $h \leftarrow v_2^{(k)}/2$
    $Y \leftarrow f(v_1^{(k)} + h)$
    $S' \leftarrow h(v_3^{(k)} + 4Y + v_4^{(k)})/3$
    $Z \leftarrow f(v_1^{(k)} + 3h)$
    $S'' \leftarrow h(v_4^{(k)} + 4Z + v_5^{(k)})/3$
    $\delta \leftarrow S' + S'' - v_6^{(k)}$
    if $|\delta| < 60\varepsilon h/d$ **then**
        $\mathfrak{S} \leftarrow \mathfrak{S} + S' + S'' + \delta/15$
        $k \leftarrow k - 1$
        if $k = 0$ **then output** $\mathfrak{S}$; **exit**
    else
        if $k = n$ **then output** niepowodzenie; **exit**
        $V \leftarrow v_5^{(k)}$
        $v^{(k)} \leftarrow (v_1^{(k)}, h, v_3^{(k)}, Y, v_4^{(k)}, S')$
        $k \leftarrow k + 1$
        $v^{(k)} \leftarrow (v_1^{(k-1)} + 2h, h, v_5^{(k-1)}, Z, V, S'')$
    end if
end while

W tej wersji algorytmu stos występuje w jawnej postaci. W programie opartym na takiej wersji składowej $v_j^{(k)}$ odpowiada element dwuwymiarowej tablicy. W pewnych językach programowania jest istotne, żeby j było pierwszym wskaźnikiem, bo wtedy składowe ustalonego wektora są pamiętane w sąsiednich komórkach pamięci. Nie musimy jednak w ogóle korzystać z tej wersji, bo metoda adaptacyjna jest w istocie rekursywna, a w większości języków programowania procedura może wywoływać nią samą. Tu zaczynamy od przybliżenia całki w całym przedziale $[a, b]$. Jeśli to nie zapewnia zadowalającej dokładności, wywołujemy dwukrotnie tę samą procedurę, odpowiednio dla lewej i prawej połowy tego przedziału. Idea metody adaptacyjnej staje się wtedy bardziej widoczna.

ZADANIA 7.6

1. Kryterium (7.6.2) dotyczy lokalnego błędu bezwzględnego. Zaprojektować takie kryterium, które pozwoliłoby uzyskać zadowalająco mały błąd względny:

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} S(x_{i-1}, x_i)\Big| \leqslant \varepsilon \Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big|.$$

2. Niech metoda adaptacyjna opiera się na wzorze trapezów:

$$\int_u^v f(x)\,dx = T(u,v) - \frac{1}{12}(v-u)^3 f''(\xi), \quad T(u,v) := \frac{1}{2}(v-u)[f(u)+f(v)].$$

Znaleźć dla tego przypadku odpowiednik wzoru (7.6.4).

3. Czy złożony wzór trapezów może być podstawą metody adaptacyjnej całkowania?

ZADANIA KOMPUTEROWE 7.6

K1. Zaprogramować podany w tekście algorytm metody adaptacyjnej i sprawdzić go dla całek
(a) $\int_0^1 x^{1/2}\,dx$, (b) $\int_0^1 (1-x)^{1/2}\,dx$, (c) $\int_0^1 (1-x)^{1/4}\,dx$.

K2. Zaprogramować metodę adaptacyjną jako procedurę rekursywną.

7.7. Teoria Sarda aproksymacji funkcjonałów

Funkcjonał liniowy w przestrzeni liniowej jest jej liniowym odwzorowaniem na przestrzeń skalarów, którą w tej książce jest zwykle $\mathbb{R}$. Ważnym przykładem funkcjonału liniowego w przestrzeni $C[a,b]$ jest całka z funkcji f:

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\,dx \quad (f \in C[a,b]). \tag{7.7.1}$$

W praktyce numerycznej jedyne funkcjonały, które można bezpośrednio obliczać, odwzorowują funkcję f na kombinację liniową jej wartości w ustalonych punktach:

$$\psi = \sum_{i=0}^{n} c_i \widehat{x}_i, \quad \text{gdzie} \quad \hat{x}(f) := f(x).$$

Inne funkcjonały, np. (7.7.1), trzeba przybliżać za pomocą funkcjonałów podobnych do ψ. To właśnie się robi w metodach różniczkowania i całkowania numerycznego.

Spójną teorię aproksymacji funkcjonałów opracował Arthur Sard w latach 1940–1970. Jego teoria obejmuje w ciekawy sposób naturalne funkcje sklejane.

Funkcjonały, jakie będziemy aproksymować, są określone na przestrzeni $C^N[a,b]$ i mają postać

$$\varphi(f) := \sum_{i=0}^{N}\Big[\int_a^b \alpha_i(x)f^{(i)}(x)\,dx + \sum_{j=1}^{l}\beta_{ij}f^{(i)}(z_{ij})\Big]. \tag{7.7.2}$$

Funkcje α_i są z założenia przedziałami ciągłe w przedziale $[a,b]$, l jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną, a punkty z_{ij} należą do tegoż przedziału.

Mówimy, że funkcjonał φ *anihiluje* przestrzeń W, jeśli $\varphi(f) = 0$ dla każdego $f \in W$. *Jądrem Peana* funkcjonału (7.7.2) jest każda z funkcji

$$K_m(t) := \frac{1}{m!}\varphi_x[(x-t)_+^m],$$

gdzie $m \geqslant N$; wskaźnik x oznacza, że funkcjonał działa na funkcję zmiennej x, a

$$(x-t)_+^m := \begin{cases}(x-t)^m & (x \geqslant t)\\ 0 & (x < t).\end{cases}$$

Przykład 7.7.1. Funkcjonał φ taki, że

$$\varphi(f) := \int_0^\pi (\cos x)f'(x)\,dx,$$

wynika z (7.7.2) dla $N = 1$, $\alpha_0(x) := 0$, $\alpha_1(x) := \cos x$ i $l = 0$. Jakie jest w tym przypadku jądro Peana K_1?

Rozwiązanie. Ponieważ

$$\frac{d}{dx}(x-t)_+^m = m(x-t)_+^{m-1} \quad (m \geqslant 1),$$

więc

$$K_1(t) = \varphi_x[(x-t)_+^1] = \int_0^\pi (\cos x)\frac{d}{dx}(x-t)_+^1\,dx =$$
$$= \int_0^\pi (\cos x)(x-t)_+^0\,dx = \int_t^\pi \cos x\,dx = -\sin t. \qquad \blacksquare$$

Poniższe twierdzenie udowodniono w 1905 r.

Twierdzenie 7.7.2. *Jeśli funkcjonał określony w* (7.7.2) *anihiluje* Π_m, *to dla każdej funkcji* $f \in C^{m+1}[a,b]$, *gdzie* $m \geqslant N$, *zachodzi równość*

$$\varphi(f) = \int_a^b K_m(t)f^{(m+1)}(t)\,dt.$$

Dowód. Z twierdzenia 1.1.7 wynika, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + r(x),$$

gdzie

$$r(x) := \frac{1}{m!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^m \, dt = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t)(x-t)_+^m \, dt.$$

Ponieważ φ anihiluje Π_m, więc $\varphi(f) = \varphi(r)$. Dla funkcjonałów φ określonych wzorem (7.7.2) można zastosować pewne twierdzenia analizy matematycznej, które pozwalają wprowadzić funkcjonał φ pod znak całki (tj. w szczególności przestawić kolejność całkowania):

$$\varphi(r) = \frac{1}{m!} \int_a^b f^{(m+1)}(t) \varphi_x[(x-t)_+^m] \, dt = \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t) \, dt. \qquad \blacksquare$$

Przykład 7.7.3. Dla funkcjonału

$$\varphi(f) := \int_0^1 x^{-1/2} f(x) \, dx$$

(Sard [1963, s. 31]) znaleźć jego przybliżenie

$$\psi(f) = c_1 f(0) + c_2 f(1)$$

dokładne w Π_1 i jego błąd dla innych f.

Rozwiązanie. Warunek nałożony na ψ oznacza, że różnica $\varphi - \psi$ anihiluje Π_1. Stosując metodę nieoznaczonych współczynników (podrozdz. 7.2), przyjmujemy, że $f(x) := 1$ i $f(x) := x$, co odpowiednio daje równania

$$0 = \varphi(f) - \psi(f) = \int_0^1 x^{-1/2} \, dx - (c_1 + c_2) = 2 - c_1 - c_2,$$
$$0 = \varphi(f) - \psi(f) = \int_0^1 x^{1/2} \, dx - c_2 = \frac{2}{3} - c_2.$$

Stąd $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}$. Jądro Peana K_1 dla $\varphi - \psi$ jest równe

$$(\varphi_x - \psi_x)(x-t)_+^1 = \int_0^1 (x-t)_+ x^{-1/2} \, dx - \frac{4}{3}(0-t)_+ - \frac{2}{3}(1-t)_+ =$$
$$= \int_t^1 (x-t) x^{-1/2} \, dx - \frac{2}{3}(1-t) = \frac{4}{3} t(t^{1/2} - 1).$$

Dlatego, na mocy tw. 7.7.2 zastosowanego do funkcjonału $\varphi - \psi$,

$$\int_0^1 x^{-1/2} f(x)\,dx - \left[\frac{4}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(1)\right] = \frac{4}{3}\int_0^1 t(t^{1/2}-1)f''(t)\,dt.$$

Otrzymaliśmy dokładne wyrażenie błędu aproksymacji wartości $\varphi(f)$ za pomocą $\psi(f)$, poprawne, gdy $f \in C^2[0,1]$. Ponieważ jądro jest niedodatnie w $[0,1]$, więc tw. 1.2.1 daje równość

$$\frac{4}{3}\int_0^1 t(t^{1/2}-1)f''(t)\,dt = \frac{4}{3}f''(\xi)\int_0^1 t(t^{1/2}-1)\,dt = -\frac{2}{15}f''(\xi). \qquad \blacksquare$$

Różnica $\varphi - \psi$ dwóch funkcjonałów identycznych na Π_m anihiluje tę przestrzeń. Jeśli K_m jest jądrem Peana tej różnicy, to z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że

$$|\varphi(f) - \psi(f)| \leqslant \|K_m\|_2\,\|f^{(m+1)}\|_2,$$

gdzie $\|g\|_2 := \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$. Jeśli anihilacja przestrzeni Π_m nie określa jednoznacznie parametrów funkcjonału ψ, to można je dobrać tak, aby norma $\|K_m\|_2$ była minimalna. Wtedy funkcjonał ψ najlepiej aproksymuje φ *w sensie Sarda*. Schoenberg udowodnił, że te najlepsze przybliżenia można otrzymać w dość prosty sposób opisany w poniższym twierdzeniu. Używamy w nim symbolu $\varphi \circ L$ dla złożenia funkcjonału φ z operatorem L: $(\varphi \circ L)(f) := \varphi(Lf)$.

Twierdzenie 7.7.4 (Schoenberg). *Niech φ będzie funkcjonałem liniowym postaci (7.7.2). Jeśli węzły t_i są takie, że $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, gdzie $n > N$, to w zbiorze wszystkich funkcjonałów $\sum_{i=0}^n c_i\widehat{t_i}$ identycznych z φ na Π_m najlepszym przybliżeniem dla φ w sensie Sarda jest funkcjonał $\varphi \circ L$, gdzie L jest operatorem liniowym, który przekształca daną funkcję na interpolującą ją w węzłach naturalną funkcję sklejaną stopnia $2m+1$.*

Dowód. Niech K_m będzie jądrem Peana funkcjonału $\varphi - \psi$ anihilującego Π_m. Ponieważ wielomiany tej klasy są zarazem naturalnymi funkcjami sklejanymi stopnia $2m+1$, więc $Lp = p$ dla $p \in \Pi_m$. Dlatego funkcjonał $\varphi - \varphi \circ L$ także anihiluje Π_m. Niech $\bar{K}_m$ będzie jego jądrem Peana. Mamy udowodnić, że

$$\int_a^b [\bar{K}_m(t)]^2\,dt \leqslant \int_a^b [K_m(t)]^2\,dt. \tag{7.7.3}$$

Jądrem Peana funkcjonału $\theta := \varphi \circ L - \psi = (\varphi - \psi) - (\varphi - \varphi \circ L)$ jest $\tilde{K}_m := K_m - \bar{K}_m$. Oczywiście

$$\tilde{K}_m(t) = \frac{1}{m!}\,\theta_x[(x-t)_+^m]. \tag{7.7.4}$$

Jeśli $\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ jest taką bazą rozważanych tu naturalnych funkcji sklejanych, że $s_i(t_j) = \delta_{ij}$, to

$$Lf = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)s_i.$$

Stąd wynika, że

$$\theta(f) = \varphi(Lf) - \psi(f) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)\varphi(s_i) - \sum_{i=0}^{n} c_i f(t_i) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i f(t_i)$$

i że wartości jądra $\tilde{K}_m$ wyrażają się wzorem

$$\tilde{K}_m(t) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{n} \gamma_i (t_i - t)_+^m. \tag{7.7.5}$$

Niech g będzie taką funkcją, że $g^{(m+1)} = \tilde{K}_m$. Wtedy $g^{(2m+1)} = \tilde{K}_m^{(m)}$; jest to funkcja przedziałami stała, czyli sklejana stopnia 0. Wobec tego g jest funkcją sklejaną stopnia $2m+1$, z węzłami t_i. Sprawdzimy, że jest to funkcja naturalna. W tym celu zauważmy najpierw, że wobec (7.7.5) jest $\tilde{K}_m(t) = 0$ dla $t \geqslant b$, a zatem $g^{(m+1)}(t) = 0$ dla tychże t. Jeśli natomiast $t \leqslant a \leqslant x$, to na mocy (7.7.4)

$$\tilde{K}_m(t) = \frac{1}{m!}\,\theta_x[(x-t)^m].$$

Ponieważ θ anihiluje Π_m, więc $\tilde{K}_m(t) = g^{(m+1)}(t) = 0$ dla $t \leqslant a$. Wiadomo już, że g jest naturalną funkcją sklejaną. Dlatego $Lg = g$ i

$$\int_a^b \bar{K}_m(t)\tilde{K}_m(t)\,dt = \int_a^b \bar{K}_m(t)g^{(m+1)}(t)\,dt = (\varphi - \varphi \circ L)(g) = 0.$$

Stąd już wynika (7.7.3), bo

$$\int_a^b K_m^2\,dt = \int_a^b (\bar{K}_m + \tilde{K}_m)^2\,dt = \int_a^b \bar{K}_m^2\,dt + \int_a^b \tilde{K}_m^2\,dt \geqslant \int_a^b \bar{K}_m^2\,dt.$$

■

Przykład 7.7.5. Niech będzie

$$\varphi(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \quad \psi(f) := c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1).$$

W klasie funkcjonałów ψ identycznych z φ na Π_1 znaleźć najlepsze przybliżenie dla φ w sensie Sarda.

Rozwiązanie. Można sprawdzić, że w tym przypadku operator L dający naturalną funkcję sklejaną stopnia trzeciego jest taki, że

$$(Lf)(x) = a_0 + a_1 x + b_0(x+1)_+^3 + b_1(x)_+^3 + b_2(x-1)_+^3,$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}[-f(-1) + 6f(0) - f(1)], \\ a_1 &= \frac{1}{4}[-5f(-1) + 6f(0) - f(1)], \\ b_0 = b_2 &= -\frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{4}[f(-1) - 2f(0) + f(1)]. \end{aligned}$$

Dlatego najlepszy funkcjonał ψ jest taki, że

$$\begin{aligned} \psi(f) = \varphi(Lf) &= \int_{-1}^{1} (Lf)(x)\,dx = \\ &= 2a_0 + 4b_0 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{1}{8}[3f(-1) + 10f(0) + 3f(1)]. \end{aligned}$$ ■

Zadania 7.7

1. Niech x i $h > 0$ będą ustalone. Stosując tw. 7.7.2 do funkcjonału

$$\varphi(f) := f(x+h) - f(x) - \tfrac{1}{2}h[3f'(x) - f'(x-h)],$$

udowodnić, że $\varphi(f) = \frac{5}{12}h^3 f'''(\xi)$, gdzie $\xi \in (x-h, x+h)$.

2. Za pomocą tw. 7.7.2 sprawdzić wzór Simpsona z błędem:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)] - \frac{1}{90}f^{(4)}(\xi).$$

3. Stosując tw. 7.7.4, udowodnić, że

$$\left| f(2) + \frac{1}{4}f(0) - \frac{7}{8}f(1) - \frac{3}{8}f(3) \right| \leqslant \sqrt{\frac{5}{48}}\,\|f''\|_2.$$

4. W przykładzie 7.7.5 znaleźć najmniejsze c takie, że $|\varphi(f) - \psi(f)| \leqslant c\|f''\|_2$.

5. Dla ustalonego $x \in (-1,1)$ znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, żeby wzór przybliżony $f'(x) \approx c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ był dokładny dla $f \in \Pi_1$. Znaleźć najlepszy taki wzór w sensie Sarda. Obliczyć minimalną wartość $\int_{-1}^{1} K_1^2(t)\,dt$.

6. Dla danych węzłów t_i i wartości λ_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ znaleźć tę funkcję f spełniającą warunki interpolacyjne $f(t_i) = \lambda_i$ i mającą drugą pochodną przedziałami ciągłą, dla której całka $\int_{t_0}^{t_n} [f''(t)]^2\,dt$ jest najmniejsza.