**Zadanie.** Ustalmy ograniczony zbiór $A \subset \mathbb{R}$. Liczbę $\bar{x} \in \mathbb{R}$ nazywamy *supremum* zbioru, jeżeli

$$\left(\forall_{x \in A}\ \ x \leqslant \bar{x}\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{y \in A}\ \ y > \bar{x} - \varepsilon\right). \tag{1}$$

Napisać warunek mówiący, że liczba $\bar{x}$ **nie jest** supremum zbioru $A$ (nie używać w wyniku symbolu negacji $\sim$).

*Przykładowe rozwiązanie.* Wystarczy zaprzeczyć zdaniu (1). Ponieważ jest to koniunkcja zdań, z prawa de Morgana $\sim (p \wedge q) \iff (\sim p) \vee (\sim q)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\sim \left(\left(\forall_{x \in A}\ \ x \leqslant \bar{x}\right) \wedge \left(\forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{y \in A}\ \ y > \bar{x} - \varepsilon\right)\right) \\ &\qquad\qquad \iff \left(\sim \forall_{x \in A}\ \ x \leqslant \bar{x}\right) \vee \left(\sim \forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{y \in A}\ \ y > \bar{x} - \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Należy zatem jeszcze zaprzeczyć zdaniom z kwantyfikatorami. Mamy

$$\sim \forall_{x \in A}\ \ x \leqslant \bar{x} \iff \exists_{x \in A}\ \ x > \bar{x}$$

oraz

$$\sim \forall_{\varepsilon > 0}\, \exists_{y \in A}\ \ y > \bar{x} - \varepsilon \iff \exists_{\varepsilon > 0}\, \forall_{y \in A}\ \ y \leqslant \bar{x} - \varepsilon.$$

Ostatecznie $\bar{x}$ nie jest supremum zbioru jeżeli

$$\left(\exists_{x \in A}\ \ x > \bar{x}\right) \vee \left(\exists_{\varepsilon > 0}\, \forall_{y \in A}\ \ y \leqslant \bar{x} - \varepsilon\right).$$

**Zadanie.** Pokazać, że relacja $\sim$ na $(0, \infty)$ zdefiniowana następująco

$$x \sim y \iff \frac{x}{y} \text{ jest liczbą wymierną}$$

jest relacją równoważności.

*Przykładowe rozwiązanie.* Należy pokazać, że relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Dla dowolnego $x > 0$ mamy $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$, zatem $x \sim x$, czyli relacja jest zwrotna.

W celu pokazania symetrii załóżmy, że $x \sim y$. Ponieważ liczba odwrotna do liczby wymiernej jest również liczbą wymierną mamy $\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}$, czyli $y \sim x$, co dowodzi symetrii relacji.

W celu pokazania przechodniości zakładamy, że $x \sim y$ oraz $y \sim z$. Wówczas

$$\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}.$$

Ponieważ $x$ i $y$ są z sobą w relacji $\sim$, a także $y \sim z$, po prawej stronie powyższej równości mamy iloczyn dwóch liczb wymiernych, który jest również liczbą wymierną. Ostatecznie $x \sim z$, co dowodzi przechodniości relacji $\sim$.

**Zadanie.** Pokazać, że dowolną kwotę pieniędzy większą lub równą 4 zł można wyrazić używając tylko dwu– i pięciozłotówek.

*Przykładowe rozwiązanie.* Użyjemy indukcji matematycznej.

(1) **Krok 1.** 4 zł można wyrazić jako dwie dwuzłotówki, więc teza jest prawdziwa dla wyrazu początkowego.

(2) **Krok 2.** Założenie indukcyjne: przyjmujemy, że $n$ zł można wyrazić za pomocą dwu– i pięciozłotówek.

(3) **Krok 3.** Musimy pokazać, że również $n+1$ zł można tak przedstawić. Rozważmy dwa przypadki:
   - gdy w przedstawieniu liczby $n$ jest pięciozłotówka, to możemy napisać $n = m+5$, gdzie $m$ jest pewną sumą wyrażalną za pomocą dwu– i pięciozłotówek. Wówczas zastępując pięciozłotówkę przez trzy dwuzłotówki otrzymujemy tezę dla $n+1$. Rzeczywiście, $n+1 = n-5+2+2+2 = m+2+2+2$ a liczba po prawej stronie tej równości ma odpowiednie przedstawienie.
   - gdy w przedstawieniu liczby $n$ nie ma żadnej pięciozłotówki, to przedstawienie zawiera co najmniej dwie dwuzłotówki, ponieważ $n$ jest większe bądź równe 4. Analogicznie jak w poprzednim kroku, zastępując dwie dwuzłotówki pięciozłotówką otrzymujemy tezę: $n + 1 = n - 2 - 2 + 5 = m + 5$.

Na mocy indukcji matematycznej teza zadania jest prawdziwa.

*Powyższe zadanie tłumaczy, dlaczego typowe nominały współczesnych walut to 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ..., podczas gdy na przykład nominały 3 lub 7 nie występują.*

**Zadanie.** Pokazać, że funkcja $f\colon [0,\infty) \to [0,1)$ dana wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ jest bijekcją. Wyznaczyć funkcję odwrotną $f^{-1}$.

*Przykładowe rozwiązanie.* Należy pokazać, że funkcja jest różnowartościowa i „na". Zaczniemy od różnowartościowości. Weźmy dowolne $x, y \in [0,\infty)$ i załóżmy, że $f(x) = f(y)$. Pokażemy, że stąd wynika $x = y$. Mamy

$$\frac{x^2}{x^2+2} = \frac{y^2}{y^2+2} \quad \text{czyli} \quad x^2y^2 + 2x^2 = x^2y^2 + 2y^2,$$

a stąd $x^2 = y^2$. Ponieważ $x, y$ są liczbami nieujemnymi, z równości $x^2 = y^2$ dostajemy $x = y$, zatem funkcja jest różnowartościowa. Aby pokazać, że $f$ jest funkcją „na", weźmy dowolne $z \in [0,1)$ i zapytajmy czy istnieje taki $x \in [0,\infty)$ że $f(x) = z$. Rozpisując mamy $\frac{x^2}{x^2+2} = z$. Po przekształceniach otrzymujemy $(1-z)x^2 = 2z$, a stąd

$$x^2 = \frac{2z}{z-1}.$$

Ponieważ dla $z \in [0,1)$ prawa strona powyższej równości jest dodatnia, zatem $x = \sqrt{\frac{2z}{z-1}}$ jest szukanym argumentem, bo $x \in [0,\infty)$. W związku z tym $f$ jest funkcją „na".

Funkcja $f$ jest różnowartościowa i „na", zatem istnieje jej funkcja odwrotna $f^{-1}$. Z dowodu faktu, że $f$ jest „na" łatwo otrzymujemy wzór na funkcję odwrotną $f^{-1}(z) = \sqrt{\frac{2z}{z-1}}$.

**Zadanie.** Przedstawić liczbę $\frac{(1-3i)^2(1-i)}{i^7-2}$ w postaci $a+bi$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$.

*Przykładowe rozwiązanie.* Zauważmy najpierw, że ze wzoru skróconego $(1-3i)^2 = 1-6i+9i^2$. Ponieważ $i^2=-1$, mamy $(1-3i)^2 = -8-6i$. Zatem w liczniku dostajemy $(-8-6i)(1-i) = -8+8i-6i+6i^2 = -14+2i$. Zauważmy, że $i^7 = i(i^2)^3 = i(-1)^3 = -i$. Stąd

$$\frac{(1-3i)^2(1-i)}{i^7-2} = \frac{-14+2i}{-i-2}\cdot\frac{i-2}{i-2} = \frac{-14i+28+2i^2-4i}{5} = \frac{26}{5} - \frac{18}{5}i.$$