Logika

Zadanie 4. Sprawdź, czy poniższe funkcje zdaniowe są tautologiami:

i) $(p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)$,

ii) $(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$.

Rozwiązanie.

i) Wprowadźmy oznaczenie

$$F(p,q) \equiv ((p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)).$$

Funkcja zdaniowa F nie jest tautologią. Aby to uzasadnić, możnaby zapisać pełną tabelkę wartości logicznych funkcji zdaniowej w zależności od wartości logicznych zdań p i q. Nie jest to jednak konieczne, wystarczy bowiem podać jeden zestaw wartości logicznych zdań p i q dla którego *zdanie* $F(p,q)$ jest fałszywe. Przypuśćmy na przykład, że zarówno zdanie p jak i q są prawdziwe. Wówczas zdanie $\neg p$ jest fałszywe, zatem zdanie $\neg p \wedge q$ jest fałszywe. Ale zdanie $p \vee q$ jest prawdziwe. *Z prawdy nie może wynikać fałsz*, więc zdanie $(p \vee q) \implies (\neg p \wedge q)$ jest rzeczywiście fałszywe.

ii) Wprowadźmy oznaczenie

$$G(p,q) \equiv ((p \implies q) \iff (\neg p \vee q)).$$

Funkcja zdaniowa G jest tautologią. Aby to uzasadnić, trzeba sprawdzić, że zdanie $G(p,q)$ jest prawdziwe niezależnie od wyboru wartości logicznych zdań p i q. Wygodnie jest to zrobić uzupełniając następującą tabelkę, korzystając z definicji poszczególnych operatorów logicznych.

p	q	$\neg p$	$p \implies q$	$\neg p \vee q$	$G(p,q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

Zadanie 7. Sformułuj możliwie naturalne zaprzeczenia następujących zdań nie używając konstrukcji typu *Nie jest prawdą, że...*

i) Lubię muzykę Bacha i Chopina.

ii) Każdy kto myśli, jest człowiekiem.

iii) Pójdę spać lub pooglądam serial.

iv) Piję piwo wtedy i tylko wtedy gdy jem chipsy.

v) Istnieje człowiek, który lubi szpinak.

Rozwiązanie. Przykładowe możliwości zaprzeczeń:

i) Nie lubię muzyki Bacha lub muzyki Chopina.

ii) Istnieje podmiot, który myśli i nie jest człowiekiem.

iii) Nie pójdę spać i nie pooglądam serialu.

iv) Piję piwo wtedy i tylko wtedy, gdy nie jem chipsów.

v) Nikt nie lubi szpinaku.

Zbiory i relacje

Zadanie 1. Rozważmy następujące podzbiory płaszczyzny:

$$A = \{(x, y) \colon x \leq 0\}, \quad B = [-1, 2] \times [0, 5], \quad C = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

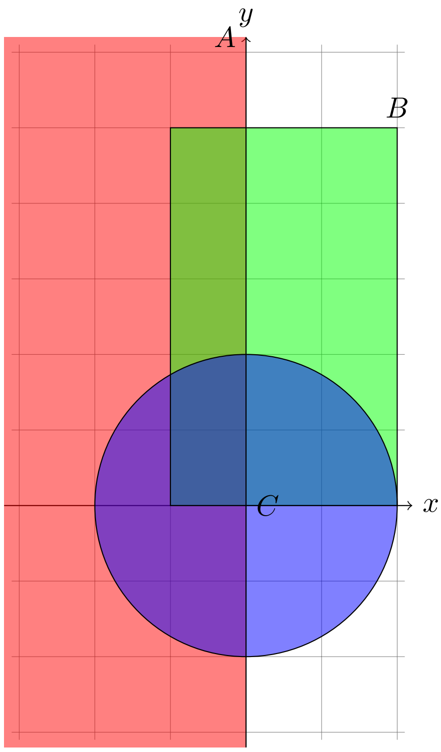
Narysuj zbiory A, B, C oraz

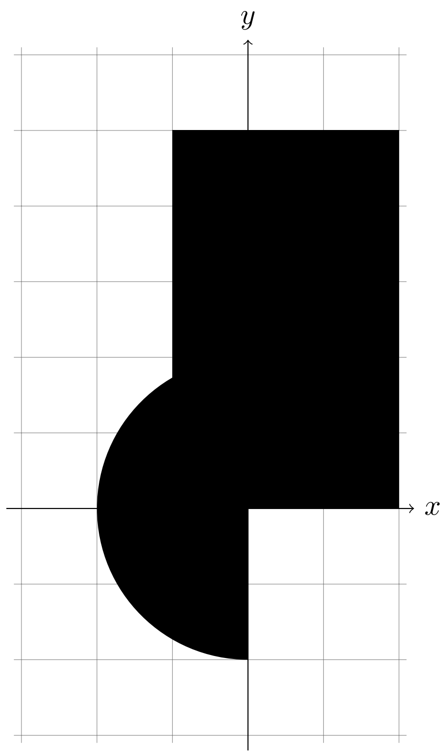
i) $B \cup (A \cap C)$,

ii) $B \cap (A \cup C)$,

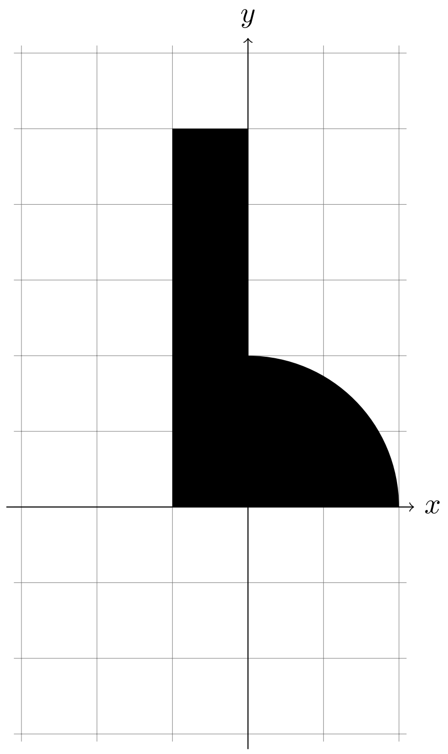
iii) $(A \setminus B) \cap C$,

Rozwiązanie.

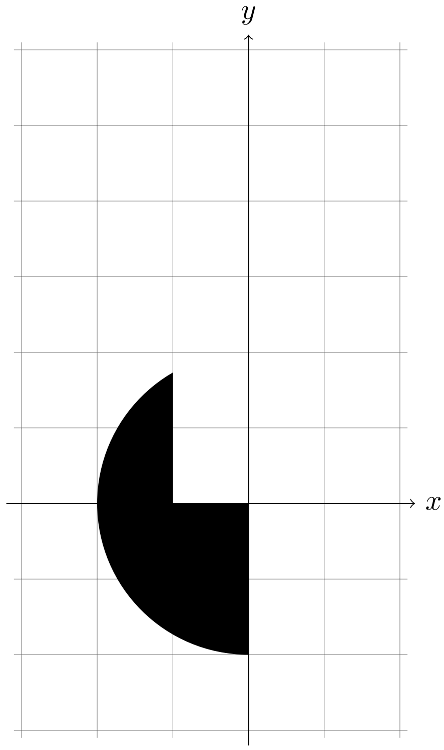




i)



ii)

iii) 

Zadanie 3. Które z następujących własności: zwrotność, symetria, antysymetria, przechodniość posiadają następujące relacje

i) pokrewieństwo,

ii) bycie rodzeństwem,

iii) bycie siostrą,

iv) bycie przodkiem,

v) starszeństwo.

Które z ww. są relacjami porządku, liniowego porządku, równoważności?

Rozwiązanie.

i) Musimy przyjąć jakąś definicję pokrewieństwa. Przypuśćmy, że krewni to osoby posiadające wspólnego przodka np. do 4 pokoleń wstecz. Tak zdefiniowana relacja

  - jest zwrotna – to oczywiste, każdy ma tych samych przodków co on sam;
  - jest symetryczna – wspólny przodek obu osób jest tak samo wspólny dla jednej jak i dla drugiej;
  - nie jest antysymetryczna – nie może być, aby to ściśle wykazać wystarczy wskazać parę krewnych A i B którzy są różnymi osobami, wówczas A jest krewnym B, B jest krewnym A, ale nie są tą samą osobą – to definicja antysymetrii;

- nie jest przechodnia – mama jest krewną dziecka, dziecko jest krewnym taty, ale mama najczęściej nie jest krewną taty.

ii) Przypuśćmy, że A *jest rodzeństwem dla* B znaczy A *ma tych samych oboje rodziców co* B. Tak zdefiniowana relacja

- jest zwrotna – to tak samo oczywiste jak w poprzednim przykładzie;
- jest symetryczna – jw.;
- nie jest antysymetryczna – jw.;
- jest przechodnia – jeśli A ma tych samych rodziców co B, a B ma tych samych rodziców co C, to ewidentnie A ma tych samych rodziców co C.

iii) Przypuśćmy, że chodzi dokładnie o relację A *jest siostrą* B Tak zdefiniowana relacja

- nie jest zwrotna – nikt nie jest własną siostrą (siostry syjamskie to wciąż dwie różne osoby);
- nie jest symetryczna – zdarza się, że A jest siostrą B, ale B jest dla A bratem;
- nie jest antysymetryczna – dowodzi tego istnienie rodzeństw składających się z co najmniej dwóch sióstr;
- jest przechodnia – jeśli A jest siostrą B, a B jest siostrą C to A jest siostrą C.

iv) Przypuśćmy, że chodzi o relację A *jest przodkiem dla* B Tak zdefiniowana relacja

- nie jest zwrotna – nikt nie jest własnym przodkiem;
- nie jest symetryczna – wręcz nigdy nie zdarza się, że A jest przodkiem dla B, a B jest przodkiem dla A;
- jest antysymetryczna – właśnie dlatego, że nigdy nie zdarza się, że A jest przodkiem dla B, a B jest przodkiem dla A – zatem implikacja w definicji antysymetrii jest spełniona w sposób pusty;
- jest przechodnia – jeśli A jest przodkiem B, a B jest przodkiem C, to A jest przodkiem C.

v) Przypuśćmy, że chodzi o relację A *urodził sie co najmniej tak wcześnie, jak* B Tak zdefiniowana relacja

- jest zwrotna – oczywiste;
- nie jest symetryczna – oczywiste;
- jest antysymetryczna – przynajmniej jeśli będziemy mierzyli czas urodzin z taką dokładnością, że żadne dwie różne osoby nie urodziły się w tym samym momencie;
- jest przechodnia – oczywiste.

Korzystając z odpowiednich definicji widzimy, że jako jedyna z powyższych relacją równoważności jest relacja bycia rodzeństwem, a jedyną relacją porządku jest relacja starszeństwa. Zgodnie z naszym założeniem, że żadna para ludzi nie urodziła się dokładnie w tym samym momencie, ta ostatnia jest relacją liniowego porzadku.

Funkcje. Funkcja logarytmiczna i wykładnicza

Zadanie 1. Niech X będzie zbiorem n-elementowym, a Y zbiorem k-elementowym. Ile jest różnych

i) relacji na X,

ii) funkcji $X \to Y$,

iii) bijekcji $X \to Y$.

Rozwiązanie.

i) Relacje na X to podzbiory zbioru $X \times X$ zawierającego wszystkie uporządkowane pary elementów X. Zastanówmy się najpierw, ile jest wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru m-elementowego Z. Wybór podzbioru Z dokonuje się przez określenie dla każego elementu Z, czy należy do podzbioru czy nie. Dla każdego elementu mamy zatem dwie opcje. Elementów dla których musimy dokonać wyboru jest zaś m, stąd ilość elementów Z to 2^m. Pozostaje pytanie, ile wynosi m, gdy $Z = X \times X$. Aby wybrać parę elementów musimy wybrać pierwszy element tej pary (co można zrobić na n sposobów) i, zupełnie niezależnie, drugi element, również na n sposobów. Wyboru pary można zatem dokonać na $n \cdot n = n^2$ sposobów. Wszystkich relacji na X jest zatem $2^{(n^2)}$.

ii) Aby zdefiniować funkcję $X \to Y$ należy, zupełnie niezaleznie od siebie, zdefiniować na jaki element Y przechodzi każdy z elementów X. Dla każdego z elementów X mozna to zrobić na dokładnie k sposobów, a elementów X jest n, zatem funkcji $X \to Y$ jest k^n.

iii) Jeśli X ma więcej elementów niż Y, to nie jest możliwa funkcja różnowartościowa $X \to Y$, jeśli zaś Y ma wiecej elementów niż X, nie jest możliwa funkcja *na* $X \to Y$. Zatem, aby w ogóle istniały jakieś bijekcje $X \to Y$, zbiory te muszą mieć tyle samo elementów (n). Wówczas wybór bijekcji przebiega w następujący sposób: dla pierwszego elementu określamy dowolnie na co przechodzi, co możemy zrobić na n sposobów. Drugiemu elementowi musimy przyporządkować inną wartośc funkcji niż pierwszemu, zatem mamy tylko $n-1$ możliwości. Wreszcie, ostatniemy elementowi X będziemy mogli przyporzadkowac tylko jeden, pozostały element Y. Zatem, bijekcji $X \to Y$ jest 0 jeśli zbiory te mają różną liczbę elementów, a $n \cdot (n-1) \cdots 1 = n!$ jeśli mają po n elementów.

Zadanie 3. Narysuj wykres funkcji

i) $y(x) = x^2$,

ii) $y(x) = 10^x$,

w skali logarytmicznej i półlogarytmicznej.

Rozwiązanie.

i) Aby stworzyć wykres w skali półlogarytmicznej, wykonujemy podstawienie $Y = \log y$, tj. $y = 10^Y$. Otrzymujemy

$$10^Y = x^2.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron powyższego równania dostajemy

$$Y = \log x^2 = 2 \log x.$$

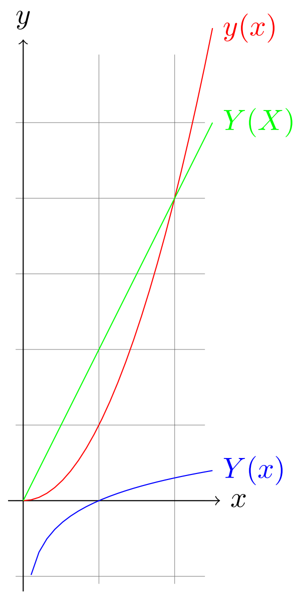
Wykres funkcji $y(x)$ w skali półlogarytmicznej jest z definicji tożsamy z wykresem

$$Y(x) = 2 \log x.$$

Aby stworzyć wykres w skali logarytmicznej wykonujemy oprócz podstawienia $Y = \log y$ także podstawienie $X = \log x$. W tym wypadku, biorąc pod uwagę dotychczasowe obliczenia jest to niezwykle łatwe:

$$Y(X) = 2X.$$

Wykres w skali logarytmicznej funkcji $y(x)$ jest z definicji tożsamy z wykresem funkcji $Y(X)$.



ii) Alternatywnie, możemy zlogarytmować obie strony równania definiującego funkcję, otrzymując dla $y(x) = 10^x$

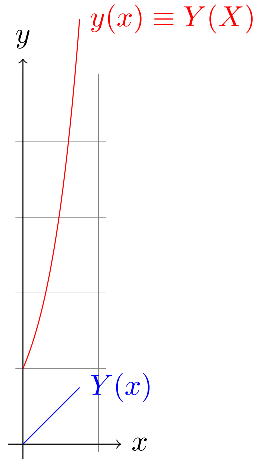
$$\log y = \log(10^x) = x,$$

czyli

$$Y(x) = x.$$

Następnie, aby otrzymać wykres w skali logarytmicznej, musimy wykonać podstawienie $X = \log x$, czyli $x = 10^X$. Otrzymujemy

$$Y(X) = 10^X.$$



$y(x) \equiv Y(X)$
y
$Y(x)$
x