1. **Zadanie**. Określmy zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dla $x, y \in A$ definiujemy:

   x jest w relacji R z y (zapisujemy xRy, lub $(x, y) \in R$) $\quad \Leftrightarrow \quad x + y \geqslant 3$

   (a) Ile par (x, y) należy do relacji R?

   (b) Czy relacja R jest zwrotna?

   (c) Czy relacja R jest symetryczna?

   (d) Czy relacja R jest antysymetryczna?

   Odpowiedź

   Następujące pary

   $(0, 3)$, $(0, 4)$,

   $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$,

   $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$,

   $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$,

   $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$ należą do R. Jest ich więc 19.

   R **nie jest zwrotna**: 0 nie jest w relacji R z 0.

   R **jest symetryczna**, gdyż prawdziwa jest implikacja $\quad x + y \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad y + x \geqslant 3$.

   R **nie jest antysymetryczna**, gdyż $\quad 3R2 \quad \wedge \quad 2R3 \quad$, ale $2 \neq 3$.

2. **Zadanie**. Zbiór X ma n elementów, a zbiór Y ma m elementów ($n, m \in \mathbb{N}$). Ile jest wszystkich funkcji $f \ : \quad X \to Y$?

   Odpowiedź:

   Liczbę tę określa liczba wszystkich wariacji n–elementowych z powtórzeniami ze zbioru m–elementowego.

Wariacją n–elementową z powtórzeniami ze zbioru m–elementowego nazywamy uporządkowany zbiór n–elementowy (n–wyrazowy ciąg) wybrany z m elementów. Wzór na ich liczbę:

$$W_m^n = m^n \,.$$

3. **Zadanie**. Zbiór X ma n elementów, a zbiór Y ma m elementów ($n, m \in \mathbb{N}$). Ile jest wszystkich funkcji różnowartościowych („$1-1$”) $f \,:\, X \to Y$?

   Odpowiedź:

   Oczywiście musi być $m \geqslant n$. Liczbę tę określa liczba wszystkich wariacji n–elementowych bez powtórzeń ze zbioru m–elementowego.

   Wariacją n–elementową bez powtórzeń ze zbioru m–elementowego nazywamy uporządkowany zbiór (n–wyrazowy ciąg) składający się z n różnych elementów wybranych z m elementów. Wzór na ich liczbę:

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,.$$

4. **Zadanie**. Zbiór X ma n elementów, a zbiór Y ma m elementów ($n, m \in \mathbb{N}$). Ile jest wszystkich funkcji określonych na zbiorze X, różnowartościowych („$1-1$”) i **na** zbiór Y?

   Odpowiedź:

   Oczywiście musi być $m = n$. Liczbę tę określa liczba wszystkich permutacji zbioru n–elementowego.

   Permutacja zbioru n–elementowego, jest to n–elementową wariacja bez powtórzeń ze zbioru $m(= n)$–elementowego. Wzór na ich liczbę:

$$P_n = n!\,.$$

5. **Zadanie**. Znaleźć funkcję odwrotną do f, gdzie

$$f \;:\quad (0,\infty) \;\longrightarrow\; (0,\infty)$$

jest zadana wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.

Odpowiedź:

Funkcja f jest „$1-1$” i „*na*” $(0,\infty)$, zatem istnieje funkcja odwrotna f^{-1} oraz

$$f^{-1} \;:\quad (0,\infty) \;\longrightarrow\; (0,\infty)\,, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{x}\,,$$

a zatem

$$f^{-1}(x) = f(x) \qquad \forall\, x > 0\,.$$

6. **Zadanie**. Podać przykład zbioru X oraz funkcji $f \;:\; X \;\longrightarrow\; X$, która jest „*na*” i **nie** jest „$1-1$” dla

- X — zbioru nieskończonego,
- X — zbioru ograniczonego,
- X — zbioru skończonego.

Odpowiedź:

Na przykład —

- $X = \mathbb{R}$ (zbiór nieskończony) oraz $f(x) = x(x-1)(x+1)$,
- $X = [-1,1]$ (zbiór ograniczony) oraz $f(x) = \frac{4}{3}x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$,

- Dla zbioru skończonego X — niemożliwe, gdyż w tym przypadku
  „$1-1$” $\Leftrightarrow$ „*na*”.

7. **Zadanie**. Ile można utworzyć (różnych) liczb parzystych czterocyfrowych

   - o powtarzających się cyfrach,
   - o niepowtarzających się cyfrach?

   Odpowiedź:

   - Powtarzające się cyfry:
     na ostatniej pozycji — jedna z pięciu parzystych cyfr, na pierwszej pozycji jedna z 9 cyfr (poza 0), czyli
     $$5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 9 \cdot 10^2 = 4500\,.$$
   - Niepowtarzające się cyfry:
     na ostatniej pozycji — jedna z pięciu parzystych cyfr, na pozostałych 3 z 9, z tym, że na pierwszej pozycji jedna z 9 cyfr (poza 0), czyli
     $$5 \cdot \frac{9!}{(9-3)!} - 4 \cdot \frac{8!}{(8-2)!} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 4 \cdot 8 \cdot 7 = 2296\,.$$

8. **Zadanie**. Policzyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-3}}{3n}$.

   Odpowiedź:

   Mamy
   $$\frac{\sqrt{4n^2-3}}{3n} = \frac{\sqrt{4-\frac{3}{n^2}}}{3}\,,$$
   a zatem
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-3}}{3n} = \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

9. **Zadanie**. Badając średni czas życia pewnego genu Li (w roku 1961 w książce *Human genetics*) otrzymał

$$U = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \ldots := \sum_{n=1}^{\infty} nw^{n-1} \,,$$

gdzie $0 < w < 1$. Znaleźć „zwarty" wzór dla U.

Wskazówka: Wyznaczyc najpierw $U - wU$.

Odpowiedź:

Mamy

$$U - wU = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \ldots - (w + 2w^2 + 3w^3 + \ldots) =$$
$$1 + w + w^2 + w^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \tfrac{1}{1-w} \,,$$

zatem

$$U = \frac{1}{(1-w)^2} \,.$$

10. **Zadanie**. Związki rtęci, zawarte w skażonej pszenicy, mogą się dostać do organizmu człowieka. Przyjmujemy, że człowiek otrzymuje dziennie stałą dawkę $d = 1.2\ mg$ tych związków i że stały procent $p = 75\%$ związków, znajdujących się w organiźmie, jest każdego dnia wydalany. Znaleźć wzór opisujący zakumulowaną ilość związków rtęci w organiźmie po n dniach. Znaleźć graniczną ilość $(n \to \infty)$ tych związków.

Odpowiedź:

$$d\left(1 - \tfrac{p}{100\%}\right)^n + d\left(1 - \tfrac{p}{100\%}\right)^{n-1} + \ldots + d\left(1 - \tfrac{p}{100\%}\right) =$$
$$d\,\frac{\left(1 - \frac{p}{100\%}\right) - \left(1 - \frac{p}{100\%}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{p}{100\%}\right)} = d\left(100\% - p\right)\frac{1 - \left(1 - \frac{p}{100\%}\right)^n}{p} \,.$$

Jeżeli $n \to \infty$, to graniczna ilość

$$d\,\frac{1-\frac{p}{100\%}}{1-\left(1-\frac{p}{100\%}\right)} = d\,\frac{100\%-p}{p}\,.$$

11. **Zadanie**. Pan K. założył sobie konto i wpłacił na nie pewną sumę pieniędzy. Następnie zapomniał o tym koncie i przypomniał sobie po 27 latach.Wówczas stwierdził, że ma na tym koncie 4 razy więcej pieniędzy niż początkowo. Wiedząc, że oprocentowanie roczne, w ciągu tych 27 lat, było niezmienne — podać to oprocentowanie.

    Odpowiedź:

    x_0 — początkowa kwota. Mamy

    $$\left(1+\frac{p}{100\%}\right)^{27} x_0 = 4x_0\,,$$

    Stąd

    $$p = \left(4^{\frac{1}{27}}-1\right)100\%\,.$$

12. **Zadanie**. W alfabecie Morse'a każda litera może być zakodowana ciągiem dwóch symboli: kropki i kreski. Ile różnych liter można zakodować za pomocą 4 takich symboli?

    Odpowiedź:

    $$2^4$$

13. **Zadanie**. Jest 6 różnych możliwych alleli tego samego *locus* genetycznego. Ile różnych genotypów jest możliwych?

    Odpowiedź:

$$6 + \binom{6}{2} = 6 + \frac{36-6}{2} = 21\,.$$

14. **Zadanie**. Procent hemów **mioglobiny** oraz **hemoglobiny** z przyłączonymi atomami tlenu, w zależności od ciśnienia $p > 0$ tlenu, opisują (w pewnym przybliżeniu) funkcje

$$\begin{aligned} f_m(p) &= \tfrac{p}{1+p} && \text{dla mioglobiny}\,, \\ f_h(p) &= \tfrac{p^4}{1+p^4} && \text{dla hemoglobiny}\,. \end{aligned}$$

Wykonać wykresy obu funkcji i porównać ich przebieg.

Odpowiedź:

Obie funkcje rosną od $f_i(0) = 0$ dla $p = 0$ do $\lim_{p\to\infty} f_i(p) = 1$ (dla $i = p$ i $i = h$). Funkcja f_m jest wklęsła dla $p > 0$ (nie ma punktów przegięcia). Funkcja f_h ma jeden punkt przegięcia dla pewnego $p_0 > 0$: dla $0 < p < p_0$ funkcja f_h jest wypukła, natomiast dla $p > p_0$ — wklęsła. Krzywa odpowiadająca funkcji f_h ma więc typowy kształt „S"-owaty. Tłumaczy się ten kształt oddziaływaniem pomiędzy hemami w cząsteczce hemoglobiny.