Zadanie (z kolokwium z 26.11.2011)
Które ze zdań jest zaprzeczeniem zdania "Jeśli myślę, to jestem"?

(a) "Myślę i mnie nie ma",

(b) "Nie myślę i nie ma mnie",

(c) "Jeśli nie myślę, to nie ma mnie".

Przykładowe rozwiązanie
Aby poprawnie odpowiedzieć na pytanie, przedstawiamy zdanie z pytania jako zdanie logiczne. Oznaczmy jako p zdanie: "Myślę", jako q - zdanie "Jestem". Wtedy polecenie polega na znalezieniu zaprzeczenia zdania $p \Rightarrow q$. Jest ono postaci $p \wedge \neg q$, gdyż zdanie $\neg(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q)$ jest tautologią (pokazaliśmy to w innym zadaniu). Szukane zdanie w postaci $p \wedge \neg q$ to zdanie (a) "Myślę i mnie nie ma".

Zadanie
Udowodnij, że dla $a > -1$ i każdego n naturalnego zachodzi nierówność:

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \tag{1}$$

zwana *nierównością Bernoulliego.*
Przykładowe rozwiązanie
Ustalmy liczbę $a > -1$.

1. Sprawdzamy, czy wzór (1) zachodzi dla $n = 1$. Jest on wtedy prawdziwy, bo lewa strona równa się prawej (jest równa $1 + a$).

2. Formułujemy hipotezę i tezę indukcyjną. Zakładamy, że nierówność Bernoulliego jest prawdziwa dla liczby naturalnej n, tj. mamy:

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \tag{2}$$

Przy tym założeniu chcemy udowodnić słuszność tej nierówności dla następnej liczby naturalnej $n+1$, tj. chcemy sprawdzić, czy:

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a. \tag{3}$$

Zauważmy, że używając założenia indukcyjnego możemy w następujący sposób przekształcić lewą stronę nierówności (3):

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2. \tag{4}$$

Oczywiście

$$1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a, \tag{5}$$

bo $na^2 \geq 0$. Z (4),(5) wynika, że $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$, czyli, że dana nierówność jest prawdziwa dla $n+1$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej i z dowolności $a > -1$ nierówność Bernoulliego jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie
Sprawdź, czy relacja $\rho \subset \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ jest relacją równoważności, jeśli:

(a) $x\rho y \iff x+y=1, \quad \mathbb{X}=\mathbb{R}$,

(b) $x\rho y \iff x-y\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \mathbb{X}=\mathbb{R}$,

(c) $x\rho y \iff x-y\in\mathbb{Z}, \quad \mathbb{X}=\mathbb{R}$,

Przykładowe rozwiązanie

(a) ρ nie jest relacją równoważności, bo nie jest relacją zwrotną (np. $\neg\,(1\rho 1)$).

(b) ρ nie jest relacją równoważności, bo nie jest symetryczna (np. dla $(x,y)=(4,2)$ mamy $x-y=2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, ale $y-x=-2\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$.

(c) ρ jest relacją równoważności, ponieważ:

- jest zwrotna, bo $\forall x\in\mathbb{R} x-x=0\in\mathbb{Z}$;
- jest symetryczna, bo $\forall x\in\mathbb{R}$ takich, że $x-y\in\mathbb{Z}$ mamy: $y-x=-(x-y)\in\mathbb{Z}$;
- jest przechodnia, bo $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ takich, że $x-y\in\mathbb{Z}$, $y-z\in\mathbb{Z}$ liczba $x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z}$ jako suma dwóch liczb całkowitych.