**Zadanie 1.**

Ciąg Fibonacciego $(f_n)$ zadany jest przez warunki: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \geq 0$. Wykaż, że dowolny wyraz ciągu ma postać:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \tag{1}$$

**Rozwiazanie.**

Szukamy rozwiązań w postaci: $f_n = \lambda^n$, gdzie $\lambda$ jest pewną liczbą, którą trzeba wyznaczyć. Podstawiamy to przedstawienie do równania rekurencyjnego i otrzymujemy następujące równanie na $\lambda$:

$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$,

które ma rozwiązanie trywialne $\lambda = 0$ (które odrzucamy) lub

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki:

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Oznacza to, że $f_n$ może być przedstawione jako kombinacja liniowa tych pierwiastków, ponieważ ciag rekurencyjny jest także liniowy. Czyli:

$$f_n = a \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \tag{2}$$

gdzie współczynniki $a$ i $b$ trzeba znaleźć z warunków początkowych. To znaczy,

$$f_0 = a + b = 0, \tag{3}$$
$$f_1 = a\frac{1+\sqrt{5}}{2} + b\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

Ten układ dwóch równań na dwie niewiadome $a$ i $b$ można rozwiazać otrzymujac: $a = 1/\sqrt{5}$, $b = -1/\sqrt{5}$. Podstawiając te wartości do równania (2) na $f_n$ dostajemy równanie (1), czyli to co trzeba było wykazać.

**Zadanie 2.**

Dowieść przez indukcję matematyczną, że dla $n \geq 1$ zachodzi:

$3^n > n^2$.

**Rozwiazanie.**

Sprawdzamy czy zachodzi nierówność dla $n = 1$:

$3 > 2$,

czyli zachodzi. Następnie zakładamy, że powyższa nierówność zachodzi dla $n = k$ $(k > 1)$, czyli

$3^k > k^2$,

i chcemy dowieść, że zachodzi także dla $n = k + 1$.

$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k^2$.

Jeśli wykażemy, że $3k^2 \geq (k+1)^2$, to będzie to koniec dowodu. Istotnie, ta nierówność jest równoważna nierówności

$k^2 \geq k + \frac{1}{2}$,

która jest słuszna dla wszystkich $k > 1$, co kończy dowód.

**Zadanie 3.**

Dane są dwie funkcje $f$ i $g$ ze zbioru liczb naturalnych N w zbiór liczb naturalnych N, mające następujące formy:

$f(n) = 2n + 3$

$g(n) = n^2$.

Znajdź złożenie funkcji $fg$ oraz $gf$.

**Rozwiazanie.**

Zgodnie z powyższymi wzorami złożenie funkcji $fg$ jest następujące:

$fg(n) = f(g(n)) = 2g(n) + 3 = 2n^2 + 3$.

Złożenie funkcji $gf$ jest analogiczne:

$gf(n) = g(f(n)) = f(n)^2 = (2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9$.

Zauważmy, że złożenia $fg$ i $gf$ dają różne funkcje.

**Zadanie 4.**

Dana jest funkcja wykładnicza $f : R \mapsto R$, taka że $y = f(x) = e^{2x+1}$. Znajdź funkcję odwrotną do $f$.

**Rozwiazanie.**

Znajdowanie funkcji odwrotnej jest równoważne geometrycznie znalezieniu odbicia danej funkcji względem prostej $y = x$. W wyniku takiego odbicia następuje zamiana współrzędnych każdego punktu na wykresie funkcji $f$, tzn.

$x \mapsto y \quad \text{oraz} \quad y \mapsto x$

(czyli $x$ przechodzi w $y$ i na odwrót).

Dokonując w danej funkcji wykładniczej powyższej zamiany dostajemy:

$x = e^{2y+1}$.

Teraz trzeba wyznaczyć $y$ z tego równania. Logarytmując obie strony (przez ln czyli log naturalny, tzn. przy podstawie $e$) dostajemy:

$\ln(x) = \ln(e^{2y+1})$.

Z własności logarytmu $\ln(a^b) = b\ln(a)$, oraz korzystając z tego, że $\ln(e) = 1$, dostajemy:

$2y + 1 = \ln(x)$.

Stąd funkcja odwrotna do funkcji $f$ ma postać:

$y = \frac{1}{2}(\ln(x) - 1)$.