

GRUPA E, ZAD. 5

Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu: $C + X \xrightarrow{k} X$.

Szybkość tej reakcji dana jest wzorem:

$$v(x) = kx(c - x),$$

gdzie $x > 0$ jest stężeniem związku X , a k i c są pewnymi stałymi dodatnimi.

- Wyznacz stężenie x_0 związku X , dla którego szybkość reakcji jest największa.
- Zbadaj monotoniczność funkcji v .
- Sprawdź, czy v jest bijekcją.

GRUPA Q, ZAD. 2

Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu: $Y + B \xrightarrow{r} Y$. Jeśli stężenie związku B jest stałe i równe 2mol/dm^3 , to szybkość powyższej reakcji dana jest wzorem:

$$v(y) = -ry^3 + 2ry,$$

gdzie $y > 0$ jest stężeniem związku Y , a r jest pewną stałą dodatnią.

- Wyznacz stężenie y_0 związku Y , dla którego szybkość reakcji jest największa.
- Zbadaj monotoniczność funkcji v .
- Sprawdź, czy v jest bijekcją.

SCHEMAT ROZWIĄZANIA

Ad. (a)

Szukamy maksimum funkcji v .

METODA I

Liczymy pochodną $v'(x)$ i sprawdzamy:

- warunek konieczny istnienia ekstremum, tj. $v'(x_0) = 0$,
- warunek wystarczający istnienia ekstremum, tj. aby w x_0 było maksimum pochodna musi zmienić znak w x_0 z dodatniej na ujemną, alternatywnie sprawdzamy, czy druga pochodna $v''(x_0) < 0$.

METODA II (z liceum, tylko w przypadku zadania 5 z grupy E)

Funkcja $v(x) = -kx^2 + kcx$ jest funkcją kwadratową, współczynnik przy najwyższej potędze x jest ujemny (stąd ramiona paraboli są skierowane ku dołowi) i maksymalną wartość funkcji otrzymamy w jej wierzchołku. Wiemy, że wyznacza się go jako: $x_0 = \frac{-kc}{-2k}$.

Ad.(b)

METODA I

Wykorzystujemy obliczenia z punktu (a) pierwszej metody (funkcja jest rosnąca tam, gdzie pochodna jest większa od zera i malejąca tam, gdzie pochodna jest mniejsza od zera).

METODA II

Wyznaczamy (zauważamy) miejsca zerowe i biorąc pod uwagę współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej rysujemy wykres funkcji wielomianowej (tak, jak w liceum). Na podstawie wykresu piszemy, gdzie funkcja jest rosnąca, gdzie malejąca.

Ad.(c)

v nie jest bijekcją, bo nie jest różnowartościowa, np. w zadaniu 5 w grupie E,

$$v\left(\frac{c}{4}\right) = v\left(\frac{3c}{4}\right) = \frac{3kc^2}{16}.$$

Można również argumentować, w zadaniu 5 w grupie E, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = v(c) = 0.$$

Podobnie, w zadaniu 2 w grupie Q

$$\lim_{y \rightarrow 0} v(y) = v(\sqrt{2}) = 0.$$

ZASADY OCENIANIA

2 punkty otrzymały osoby, które zrobiły wszystko dobrze (lub prawie wszystko w grupie Q, która się okazała trochę trudniejsza). 1 punkt otrzymały osoby, które dobrze zrobiły ok. połowę zadania.