1 LINIOWE RÓWNANIE JEDNORODNE

Na podstawie

- J. Ombach, Wykłady z równań różniczkowych, Wydawnictwo UJ, Kraków 1999
- A. Palczewski, Równania różniczkowe zwyczajne, WN–T, Warszawa 1999

$\mathrm{GS_H}$ — rozwiązanie ogólne, czyli zbiór wszystkich funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ spełniających (autonomiczne) liniowe równanie jednorodne

$$\dot{x} = \mathcal{A}x\,, \tag{JLRR}$$

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Mamy więc

$$\mathrm{GS_H} = \left\{ u \ : \quad u(t) = e^{t\mathcal{A}}\xi\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Przykład 1.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{t\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Wtedy

$$\mathrm{GS_H} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \ : \quad u_j(t) = e^{t\lambda_j}\xi_j\,, \quad t, \xi_j \in \mathbb{R}\,, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

Przykład 2.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{A}_k \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{t\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e^{t\mathcal{A}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\mathcal{A}_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\mathcal{A}_k} \end{bmatrix}$$

gdzie $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Zatem dla układu

$$\dot{x}_i = a^{(k)}_{i,j} x_j \,, \qquad \mathcal{A}_k = \left[a^{(k)}_{i,j} \right], \qquad k = 1, \ldots, m \,,$$

$$i, j \in \Big\{ \eta(k-1) + 1 \,, , \, \ldots \,, \, \eta(k) \Big\}, \qquad \eta(0) = 0 \,, \qquad \eta(k) = \sum_{l=1}^{k} n_l \,,$$

mamy

$$\mathrm{GS}_{\mathrm{H}} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;:\quad u_i(t) = \left(e^{t\mathcal{A}_k} \right)_{i,j} \xi_j \,, \quad t \in \mathbb{R}^1 \,, \right.$$

$$\left. k = 1, \ldots, m \,, \quad i, j \in \Big\{ \eta(k-1) + 1 \,, , \, \ldots \,, \, \eta(k) \Big\}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\}$$

Przykład 3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 \end{bmatrix}$$

Oznaczamy $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a + \mathcal{B}_b$. Mamy $\mathcal{A}_a \mathcal{B}_b = \mathcal{B}_b \mathcal{A}_a$ (gdyż $\mathcal{A}_a = a\mathbb{I}$), a więc

$$e^{t(\mathcal{A}_a + \mathcal{B}_b)} = e^{t(\mathcal{A}_a)} e^{t(\mathcal{B}_b)} \,.$$

Oczywiście

$$e^{t\mathcal{A}_a} = \begin{bmatrix} e^{ta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{ta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{ta} \end{bmatrix}$$

oraz

$$(\mathcal{B}_b)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i dalej: przesunięcie niezerowej linii o jedno miejsce w dół i podnoszenie do kolejnych potęg, w szczególności

$$(\mathcal{B}_b)^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b^{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli same zera oprócz dolnego lewego rogu. Następnie $\mathcal{B}_b^k = 0\,,\ \forall\ k \geqslant n.$ Zatem

$$e^{t\mathcal{B}_b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{tb}{1!} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2b^2}{2!} & \frac{tb}{1!} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{t^{n-1}b^{n-1}}{(n-1)!} & & & \dots & \frac{tb}{1!} & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$e^{t\left(\mathcal{A}_a+\mathcal{B}_b\right)} = e^{t\mathcal{A}_a}e^{t\mathcal{B}_b} = \begin{bmatrix} e^{ta} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{tb}{1!}e^{ta} & e^{ta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2b^2}{2!}e^{ta} & \frac{tb}{1!}e^{ta} & e^{ta} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{t^{n-1}b^{n-1}}{(n-1)!}e^{ta} & & & \dots & \frac{tb}{1!}e^{ta} & e^{ta} \end{bmatrix}$$

Stąd dla układu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 &= bx_2 + ax_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n &= bx_{n-1} + ax_n \end{aligned}$$

mamy

$$\mathrm{GS_H} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \; : \quad u_1(t) = e^{ta}\xi_1 \,, \quad u_2(t) = \tfrac{bt}{1!}e^{ta}\xi_1 + e^{ta}\xi_2 \,, \ldots \,, \right.$$

$$\left. u_n(t) = \tfrac{(bt)^{n-1}}{(n-1)!}e^{ta}\xi_1 + \ldots + \tfrac{bt}{1!}e^{ta}\xi_{n-1} + e^{ta}\xi_n \,, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\}$$

Przykład 4.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} =: \mathcal{A}_\alpha + \mathcal{B}_\beta \,.$$

Mamy $\mathcal{A}_\alpha \mathcal{B}_\beta = \mathcal{B}_\beta \mathcal{A}_\alpha$. Wystarczy znaleźć $e^{t\mathcal{B}_\beta}$. Mamy $\mathcal{B}_\beta = \beta \mathcal{B}_*$, gdzie

$$\mathcal{B}_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym

$$(\mathcal{B}_*)^2 = -\mathbb{I} \,, \qquad (\mathcal{B}_*)^3 = -\mathcal{B}_* \,, \qquad (\mathcal{B}_*)^4 = \mathbb{I} \,, \qquad (\mathcal{B}_\beta)^n = \beta^n (\mathcal{B}_*)^n \,.$$

Stąd

$$e^{t\mathcal{B}_\beta} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \,,$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_{11} = d_{22} &= 1 - \tfrac{(t\beta)^2}{2!} + \tfrac{(t\beta)^4}{4!} + \ldots = \cos(t\beta) \\ d_{12} = -d_{21} &= t\beta - \tfrac{(t\beta)^3}{3!} + \tfrac{(t\beta)^5}{5!} + \ldots = \sin(t\beta) \,. \end{aligned}$$

Zatem $e^{t\mathcal{B}_\beta}$ jest macierzą obrotu o kąt $t\beta$ „zgodnie z ruchem wskazówek zegara”. Czyli $e^{t\mathcal{A}}$ opisuję obrót o kąt $t\beta$ złożony z jednokładnością o stosunku $e^{t\alpha}$.

Rozważmy układ

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{aligned}$$

Rozwiązanie wyraża się

$$\mathrm{GS_H} = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \; : \quad \begin{array}{l} u_1(t) = e^{ta}\Big(\cos(t\beta)\xi_1 + \sin(t\beta)\xi_2 \Big) \\ u_2(t) = e^{ta}\Big(-\sin(t\beta)\xi_1 + \cos(t\beta)\xi_2 \Big) \end{array} \,, \right.$$

$$\left. \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

Ćwiczenie 5.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbb{I}_2 & \Lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{I}_2 & \Lambda \end{bmatrix},$$

$$\text{gdzie} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dla $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Podobnie, jak poprzednio mamy

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e^{t\Lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t}{1!}e^{t\Lambda} & e^{t\Lambda} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!}e^{t\Lambda} & \frac{t}{1!}e^{t\Lambda} & e^{t\Lambda} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{t\Lambda} & & & \dots & \frac{t}{1!}e^{t\Lambda} & e^{t\Lambda} \end{bmatrix}$$

2 ELEMENTY TEORII JORDANA

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 — 1922)

Na podstawie

- M. Hirsch, and S. Smale, Ordinary Differential Equations and Linear Algebra, Academic Press, New York 1974.

Rozważmy $\mathcal{A} \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{C}^n\Big)$. Niech $\sigma(\mathcal{A})$ będzie **widmem** (`spectrum`) $\mathcal{A}$ tzn.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^1 \ : \quad \exists\, x \in \mathbb{C}^n\,, \quad x \neq 0\,, \quad \mathcal{A}x = \lambda x\Big\}.$$

$x \neq 0$ spełniające równanie $\mathcal{A}x = \lambda x$ nazywa się **wektorem własnym** (`eigenvector`) odpowiadającym **wartości własnej** (`eigenvalue`) λ.
Pokazuje się, że

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \det\Big(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\Big) = 0 \tag{1}$$

(`characteristic polynomial`).

Jeżeli wszystkie pierwiastki (1) są różne

$$\lambda_j \neq \lambda_k \quad (\forall\, j, k = 1, \ldots, n)\,, j \neq k\,,$$

to odpowiadające im wektory własne x^1 , ... x^n tworzą bazę w $\mathbb{C}^n$.
Macierz odwzorowania $\mathcal{A}$ w tej bazie ma postać

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Wówczas $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$ $\Big($ suma prosta podprzestrzeni jednowymiarowych generowanych przez x^j : tzn. każdy $x \in \mathbb{C}^n$ ma reprezentację

$$x = \tilde{x}^1 + \cdots + \tilde{x}^n\,, \quad \tilde{x}^j \in E_j\,, \quad j = 1, \ldots, n\Big)\,.$$

Rzuty kanoniczne określone są przez

$$P_j \ : \ \mathbb{C}^n \to E_j\,, \qquad P_j x = \tilde{x}^j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

E_j są niezmiennicze względem $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(E_j) \subset E_j\,,$$

a obcięcie $\mathcal{A}\Big|_{E_j}$ ma dokładnie jedną wartość własną λ_j.
Niech $\mathcal{P}$ będzie macierzą, której kolumny są wektorami własnymi $x^1, x^2, \ldots, x^n$

$$\mathcal{P} = \Big[x^1, x^2, \ldots, x^n\Big]\,.$$

Z $\mathcal{A}x^j = \lambda_j x^j$ $(j = 1, \ldots, n)$ mamy $\mathcal{AP} = \mathcal{PJ}$, czyli

$$\mathcal{A} = \mathcal{PJP}^{-1}$$

(odwracalność $\mathcal{P}$ wynika z faktu, że jej kolumny tworzą bazę).

W sytuacji ogólnej, gdy $\mathcal{A}$ może mieć wielokrotne wartości własne jest podobnie. Niech n_j $(j = 1, \ldots, k)$ oznacza algebraiczną krotność pierwiastka λ_j wielomianu charakterystycznego

$$\det\Big(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{A}\Big) = \Big(\lambda - \lambda_1\Big)^{n_1} \ldots \Big(\lambda - \lambda_k\Big)^{n_k}\,,$$

$n = n_1 + \ldots + n_k$, $k \leqslant n$.
Z tw. Jordana istnieje dokładnie jedna („`z dokładnością do permutacji`”) baza $x^1, \ldots, x^n$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$, w której $\mathcal{A}$ ma macierz $\mathcal{J}$ postaci

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r \end{bmatrix}$$

$k \leqslant r \leqslant n$; J_j są liczbami, lub macierzami postaci postaci

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

oraz

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ leży na przekątnej } \mathcal{J}$$

$\mathcal{J}$ nazywa się (zespoloną) macierzą Jordana (`Jordan matrix`) odwzorowania $\mathcal{A}$.
J_j — klatka Jordana (pierwszego rodzaju) (`Jordan's block`)
Każdej klatce J_j odpowiada dokładnie jedna wartość własna. Może się jednak zdarzyć, że ta sama wartość własna występuje w kilku klatkach.
Każdej klatce Jordana J_j odpowiada podprzestrzeń wektorowa E_j generowana przez wektory wybrane z bazy $x^1, \ldots, x^n$ odpowiadające tej klatce. Wtedy przestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest sumą prostą $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r} E_j$. Podprzestrzenie są niezmiennicze. Obcięcie $\mathcal{A}\Big|_{E_j}$ ma dokładnie jedną wartość własną λ z przekątnej klatki J_j.
Biorąc macierz $\mathcal{P} = \left[x^1, \ldots, x^n\right]$, której kolumnami są wektory bazy, istniejącej z tw. Jordana, otrzymamy

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1}\,.$$

Biorąc pod uwagę przykłady 1–3 otrzymujemy

TWIERDZENIE 1. *Niech $\mathcal{A} \in \mathcal{L}\Big(\mathbb{C}^n\Big)$ oraz $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ $(k \leqslant n)$ będą różnymi wartościami własnymi $\mathcal{A}$ o algebraicznej krotności odpowiednio $n_1,\ldots,n_k$. Dla każdego $j = 1,\ldots,k$ istnieje dokładnie n_j liniowo niezależnych rozwiązań*

$$\dot{x} = \mathcal{A}x \tag{JLRR}$$

w $\mathbb{C}^n$, postaci

$$x^{j,l}(t) = e^{\lambda_j t} w^{j,l-1}(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

$1 \leqslant l \leqslant n_j$ *, gdzie $w^{j,l-1}(t)$ jest wielomianem względem t, ze współczynnikami w $\mathbb{C}^n$ stopnia $< l$. Zbiór tych rozwiązań tworzy fundamentalny zbiór rozwiązań (JLRR).*

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest diagonalizowalna, to (JLRR) ma fundamentalny zbiór rozwiązań postaci

$$\Big\{e^{\lambda_j t} y^{j,l} \ : \quad 1 \leqslant l \leqslant n_j\,, \quad 1 \leqslant j \leqslant k\Big\}\,,$$

gdzie $y^{j,l} \in \mathbb{C}^n$ są liniowo niezależnymi wektorami.

Uwaga. Jeżeli $\mathcal{A}$ jest diagonalizowalny, to macierz reprezentująca $\mathcal{A}$ w pewnej bazie ma postać

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\Big[\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{n_1\,\times}, \underbrace{\lambda_2,\ldots,\lambda_2}_{n_2\,\times}, \ldots, \underbrace{\lambda_k,\ldots,\lambda_k}_{n_k\,\times}\Big]\,.$$

W tej bazie równanie (JLRR) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tilde{\lambda}_1 x_1\,, \\ &\ \,. \\ &\ \,. \\ &\ \,. \\ \dot{x}_k &= \tilde{\lambda}_k x_k\,, \end{aligned}$$

gdzie $\tilde{\lambda}_l = \lambda_j$ dla $n_1 + \ldots + n_{j-1} < l \leqslant n_1 + \ldots + n_j$. O tym mówi ostatnia część twierdzenia.

Przykład 6. Niech $\mathcal{A}$ będzie macierzą 2×2 o wyrazach rzeczywistych. Załóżmy, że macierz $\mathcal{A}$ ma zespoloną wartość własną $\lambda = \alpha + i\beta$, gdzie $\beta > 0$. Wówczas $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ jest wartością własną $\mathcal{A}$ i nie ma innych wartości własnych.

Niech $x \in \mathbb{C}^2$ będzie wektorem własnym odpowiadającym λ. Niech $x = x^1 + ix^2$, gdzie $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^2$. Z $\mathcal{A}x = \lambda x$, przez porównanie części rzeczywistych i urojonych otrzymujemy:

$$\mathcal{A}x^1 = \alpha x^1 - \beta x^2\,, \qquad \mathcal{A}x^2 = \beta x^1 + \alpha x^2\,. \tag{2}$$

x jest wektorem własnym, więc $x \neq 0$.

Pokażemy, że $x^1 \neq 0$ i $x^2 \neq 0$

gdyby $x^1 = 0$, to z 1 równości w (2) wynikałoby $\beta x^2 = 0$, więc $x^2 = 0$, sprzeczność; podobnie x^2 nie może być $= 0$.

Pokażemy, że x^1, x^2 tworzą bazę w $\mathbb{R}^2$. Rzeczywiście, x^1, x^2 są liniowo niezależne:

załóżmy, że istnieje $r \in \mathbb{R}$, t.ż. $x^2 = rx^1$. Równość 1 w (2) daje

$$\mathcal{A}x^1 = \big(\alpha - \beta r\big)x^1\,.$$

Ponieważ $x^1 \neq 0$, więc $\mathcal{A}$ miałby wartość własną $\alpha - \beta r$, co jest niemożliwe.

W bazie x^1, x^2 odwzorowanie $\mathcal{A}$ ma macierz (por. (2))

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Sytuacja ogólna: niech $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Podobnie jak w przykładzie dowodzi się, że istnieje baza $x^1, x^2, \ldots, x^n$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$, w której $\mathcal{A}$ ma macierz

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r \end{bmatrix}$$

$k \leqslant r \leqslant n$, J_j ma jedną z 4 postaci

$$J_j = \lambda\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{4}$$

$$J_j = J_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \quad \beta \neq 0 \tag{5}$$

$$J_j = \begin{bmatrix} J_{\alpha,\beta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbb{I}_2 & J_{\alpha,\beta} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{I}_2 & J_{\alpha,\beta} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

$\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \;\Rightarrow\; \lambda$ leży na przekątnej macierzy $\mathcal{J}$, lub $\lambda = \alpha + i\beta$ i $J_{\alpha,\beta}$ leży na przekątnej macierzy $\mathcal{J}$.

Macierz $\mathcal{J}$ nazywa się rzeczywistą macierzą Jordana odwzorowania $\mathcal{A}$, a macierze J_j — klatkami Jordana.

Każdej klatce Jordana odpowiada dokładnie jedna („ `z dokładnością do sprzeżenia`") wartość własna.

Jednak może się zdarzyć, że ta sama wartość własna występuje w kilku klatkach.

Każdej klatce Jordana odpowiada podprzestrzeń wektorowa E_j generowana przez wektory wybrane z bazy $x^1, \dots, x^n$ odpowiadające tej klatce. Wtedy $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{r} E_j$, E_j są niezmiennicze, a obcięcie $\mathcal{A}\Big|_{E_j}$ ma

- dokładnie jedną wartość własną, równą liczbie λ, z przekątnej odpowiedniej klatki J_j, gdy klatka jest postaci (3), lub (4);
- dokładnie dwie wartości własne $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$, z przekątnej odpowiedniej klatki, gdy klatka jest postaci (5), lub (6).

Zatem, jeżeli $\mathcal{P} = \left[x^1, \dots, x^n\right]$ jest macierzą, której kolumnami są wektory bazy (istnieje z tw. Jordana), to

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{J}\mathcal{P}^{-1}\,.$$

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$u(t) = \mathcal{P}e^{t\mathcal{J}}\mathcal{P}^{-1}\xi = \mathcal{P}e^{t\mathcal{J}}\tilde{\xi}\,,$$

gdzie $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$ (bo odwzorowanie $\xi \to \mathcal{P}^{-1}\xi$ jest bijekcją).

Mamy zatem:

TWIERDZENIE 2. *Niech $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ i niech u będzie rozwiązaniem*

$$\dot{x} = \mathcal{A}x\,, \qquad \text{w } \mathbb{R}^n\,.$$

Wówczas u jest liniową kombinacją funkcji postaci

$$a\,t^k e^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t)\,, \quad b\,t^l e^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^n\,,$$

gdzie $\lambda = \alpha + i\beta$ przebiega wszystkie wartości własne $\mathcal{A}$ (traktowanej jako zespolona),

$$\beta \geqslant 0\,, \qquad k, l \leqslant m(\lambda) - 1\,,$$

$m(\lambda)$ jest algebraiczną krotnością wartości własnej λ.

TWIERDZENIE 3. *(„**Kryterium stabilności**"). Jeżeli $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$, gdzie $X = \mathbb{C}^n$, lub $X = \mathbb{R}^n$, to*

$$\mathrm{L}\ :\ \left(\lim_{t\to\infty} e^{t\,\mathcal{A}} = 0 \quad \text{w} \quad \mathcal{L}(X)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\Re\,\lambda < 0 \quad \forall\,\lambda \in \sigma(\mathcal{A})\right)\ :\mathrm{P}\,,$$

Czyli każde rozwiązanie u równania (JLRR) w X spełnia

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne leżą w ujemnej otwartej półpłaszczyźnie $\mathbb{C}$.

Dowód. Jeżeli $X = \mathbb{R}^n$, to

$$\left(e^{t\mathcal{A}}\right)_{\mathbb{C}} = e^{t\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}\,, \qquad \forall\,t \in \mathbb{R}$$

oraz

$$\max\Big\{|x|, |y|\Big\} \leqslant |x + iy| \leqslant 2\max\Big\{|x|, |y|\Big\}\,, \qquad \text{dla} \quad x + iy \in \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n\,.$$

Stąd

$$\left(e^{t\mathcal{A}}\right)_{\mathbb{C}} \to 0 \quad \text{w} \quad \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{t\mathcal{A}} \to 0 \quad \text{w} \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Wystarczy zatem rozpatrzeć przypadek $\mathbb{C}^n$.

Pokażemy $\mathbf{L} \Longleftarrow \mathbf{P}$: załóżmy więc $\Re\lambda < 0 \ \forall\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Jeżeli u jest dowolnym rozwiązaniem $\dot{x} = \mathcal{A}x$, to u jest liniową kombinacją

$$t^k e^{\lambda t}\xi\,, \qquad \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\,, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n\,,$$

$$|t^k e^{\lambda t}\xi| = t^k e^{t\,\Re\lambda}|\xi|\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Zatem $u(t) \to 0$ dla $t \to \infty$.

$\mathbf{L} \implies \mathbf{P}$: Pokażemy, że $\sim \mathbf{L} \Leftarrow \sim \mathbf{P}$.

Załóżmy, że $\Re\lambda \geqslant 0$ dla pewnej $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Wówczas $u(t) := e^{\lambda t}\xi$, dla $\xi \in \ker(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{A})$, $\xi \neq 0$ (ξ — wektor własny odpowiadający λ), jest rozwiązaniem $\dot{x} = \mathcal{A}x$ oraz

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = |\xi| \lim_{t\to\infty} e^{t\,\Re\lambda} \neq 0$$

To kończy dowód, gdyż oczywiście:
$e^{t\mathcal{A}}$ zbiega do 0 w $\mathcal{L}(X)$ przy $t \to \infty \iff$ każde rozwiązanie zbiega do 0 w X przy $t \to \infty$.

Ćwiczenie 7. . Każde rozwiązanie $u \neq 0$ równania $\dot{x} = \mathcal{A}x$ w $X = \mathbb{C}^n$, lub $X = \mathbb{R}^n$ spełnia

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \qquad \iff \qquad \Re\lambda > 0\,, \quad \forall\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\,.$$