Zadanie Q5. Stężenie leku w krwi pacjenta od momentu podania przez godzinę rośnie liniowo, po czym osiąga maksymalną wartość 2 mmol/l i utrzymuje się na tym poziomie przez kolejne 2 godziny. Po tym czasie stężenie spada wykładniczo, przy czym po 4 godzinach od podania wynosi 1 mmol/l.

(a) Zapisać zależność $c(t)$ stężenia leku we krwi pacjenta (w mmol/l) od czasu od momentu podania (w godzinach), wiedząc że zależność ta jest funkcją ciągłą.

(b) Narysować jej wykres.

(c) Przez ile czasu stężenie leku będzie się utrzymywać na poziomie co najmniej $0,5$ mmol/l?

Wskazówki. Szukana zależność będzie się wyrażała różnymi wzorami w trzech przedziałach argumentu t. Funkcja wykładnicza zapisuje się w postaci $a \cdot b^t$ dla pewnych parametrów a, b.

Rozwiązanie.

(a) Wg informacji w zadaniu, szukana zależność $c(t)$ jest liniowa w przedziale $[0, 1)$, stała (i równa 2) w przedziale $[1, 3)$ i wykładnicza w przedziale $[3, \infty)$, czyli jest postaci

$$c(t) = \begin{cases} A \cdot t + B & \text{dla } t \in [0,1), \\ 2 & \text{dla } t \in [1,3), \\ a \cdot b^t & \text{dla } t \in [3, \infty) \end{cases}$$

dla pewnych parametrów A, B, a, b. Pozostaje znaleźć wartości tych parametrów. Z założenia ciągłości, przyjmując rozsądnie, że początkowe stężenie leku wynosi 0, dostajemy układ równań

$$\begin{cases} A \cdot 0 + B = 0, \\ A \cdot 1 + B = 2 \end{cases}$$

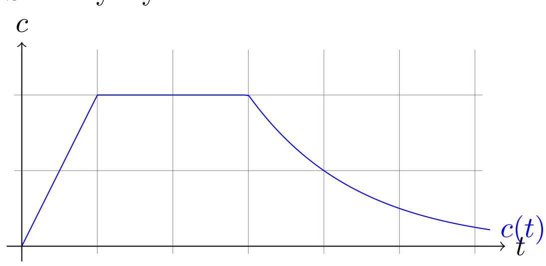
skąd z łatwością dedukujemy, że $B = 0, A = 2$. Podobnie,

$$\begin{cases} a \cdot b^3 = 2, \\ a \cdot b^4 = 1. \end{cases}$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze otrzymujemy $b = \frac{1}{2}$. Stąd, wykorzystując drugie równanie, dostajemy $a = \frac{1}{b^4} = 16$. Ostatecznie, otrzymujemy

$$k(t) = \begin{cases} 2 \cdot t & \text{dla } t \in [0,1), \\ 2 & \text{dla } t \in [1,3), \\ 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t & \text{dla } t \in [3, \infty). \end{cases}$$

(b) Szukany wykres:



(c) Znajdźmy moment w czasie liniowego przyrostu stężenia, gdy osiąga ono poziom $0,5$ mmol/l:

$$2 \cdot t = 0,5 \implies t = 0,25$$

i moment w czasie wykładniczego spadku, gdy spada ono do tego poziomu:

$$16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t = 0,5 \implies \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{32} \implies t = 5.$$

Zatem stężenie utrzymuje się na poziomie co najmniej $0,5$ mmol/l przez $4,75$ h, czyli 4 godziny i 45 minut.

Punktacja.

- 2 pkty – pełne rozwiązanie, ew. z drobnymi błędami np. obliczeniowymi lub z odmienną (ale nie upraszczającą zbytnio zadania) interpretacją punktu (c);
- 1 pkt – *co najmniej* poprawnie wypisana zależność $c(t)$ w części liniowej i stałej oraz poprawnie narysowany wykres świadczący o zgrubnym zrozumieniu natury funkcji wykładniczej *lub*, nawet w wypadku błędów w powyższym, poprawnie obliczona część wykładnicza $c(t)$ albo rozwiązany podpunkt (c) (jednak bez spełnienia warunków na 2 pkty).