Zadanie 4Q.

Rozpatrzmy trzy populacje bakterii K, L, M, które w chwili początkowej są w tej samej fazie cyklu komórkowego. W ustalonych odstępach czasu t_0 może dojść do podziału komórkowego. Przyjmujemy, że komórki mają dowolny dostęp do pożywienia oraz

- w populacji K wszystkie komórki dzielą się co t_0 jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji L średnio tylko $\frac{1}{4}$ komórek dzieli się co t_0 jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji M średnio tylko $\frac{1}{4}$ komórek dzieli się co t_0 jednostek czasu, a pozostałe giną.

Określić stan n każdej z tych populacji w kolejnych momentach czasu t_0, $2t_0$, $3t_0$, $\ldots$, kt_0 oraz odpowiedzieć na pytanie: ile razy więcej jest komórek typu K w stosunku do L i M w momencie $3t_0$.

Odpowiedź:

Oznaczmy przez n_k stan populacji w chwili kt_0 tuż po k-tym podziale komórkowym. Układamy równanie rekurencyjne, które określa ciąg geometryczny

Otrzymujemy kolejno

K) $n_{k+1} = n_k + n_k = 2n_k$ czyli $n_k = 2^k n_0$,

L) $n_{k+1} = (1/4)n_k + (1/4)n_k + (3/4)n_k = (5/4)n_k$ czyli $n_k = (5/4)^k n_0$,

M) $n_{k+1} = (1/4)n_k + (1/4)n_k + 0 = (1/2)n_k$ czyli $n_k = (1/2)^k n_0$ dla wszytkich $k \geqslant 0$.

Liczymy iloraz stanu populacji K w kroku k-tym do stanu w kroku k-tym każdej z pozostałych populacji.Dostajemy:

Populacja K jest po k-tym podziale $(8/5)^k$ razy liczniejsza niż populacja L

Populacja K jest po k-tym podziale 4^k razy liczniejsza niż populacja M

Wstawiając $k = 3$ otrzymujemy odpowiedź na pytanie zawarte w zadaniu.