

EGZAMIN 28 stycznia 2015: GRUPA Q zadanie 2

Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu: $Y + B \xrightarrow{r} Y$. Jeśli stężenie związku B jest stałe i równe 2mol/dm^3 , to szybkość powyższej reakcji dana jest wzorem:

$$v(y) = -ry^3 + 2ry,$$

gdzie $y > 0$ jest stężeniem związku Y , a r jest pewną stałą dodatnią.

- Wyznacz stężenie y_0 związku Y , dla którego szybkość reakcji jest największa.
- Zbadaj monotoniczność funkcji v .
- Sprawdź, czy v jest bijekcją.

Rozwiązanie. Mamy

$$v(0) = v(c) = 0,$$

oraz

$$v'(y) = -3ry^2 + 2r.$$

Stąd $v'(y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ponadto

$$v'(y) > 0 \text{ dla } y \in \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

$$v'(y) < 0 \text{ dla } y > \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Zatem

- Dla $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ jest maksimum;
- $v = v(y)$ rośnie na $\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ i maleje na $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right)$;
- $v = v(y)$ nie jest bijekcją, gdyż nie jest nawet różnowartościowa.