

## EGZAMIN 28 stycznia 2015: GRUPA Q

Powodzenia, Drodzy Nasi Studenci!!!

Prosimy nie nastawiać się na rozwiązanie WSZYSTKICH zadań, lecz wybrać te, które są Państwu najbliższe! Aby otrzymać ocenę **dostateczną** wystarczy rozwiązać **poprawnie** jedno z zadań od 1 do 5. Każde zadanie **prosimy** rozwiązywać na **oddzielnej PODPISANEJ** kartce papieru. **Nie wolno** korzystać z książek, kalkulatorów, komputerów, laptopów, etc. Można natomiast korzystać z własnej kartki papieru („ściągł”) ze wzorami! Na dwa ostatnie pytania (6 i 7) proszę odpowiedzieć **JEDNYM** krótkim zdaniem. Prawidłowe odpowiedzi na te (6 i 7) pytania **nie** wystarczą do oceny **dostatecznej** — mogą natomiast podwyższyć pozytywną ocenę.

1. **Zadanie.** Na zbiorze  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  rozważamy relację  $\rho$  zdefiniowaną następująco:

$$(a, b) \rho (x, y) \iff ay = bx.$$

Sprawdzić, czy  $\rho$  jest relacją równoważności. Narysować wykres dla relacji  $\rho$  obciętej do zbioru  $\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 6)\}$  (tzn. wykres powinien uwzględniać tylko te punkty i żadne inne).

2. **Zadanie.** Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu:  $Y + B \xrightarrow{r} Y$ . Jeśli stężenie związku  $B$  jest stałe i równe  $2\text{mol/dm}^3$ , to szybkość powyższej reakcji dana jest wzorem:

$$v(y) = -ry^3 + 2ry,$$

gdzie  $y > 0$  jest stężeniem związku  $Y$ , a  $r$  jest pewną stałą dodatnią.

- (a) Wyznacz stężenie  $y_0$  związku  $Y$ , dla którego szybkość reakcji jest największa.  
(b) Zbadaj monotoniczność funkcji  $v$ .  
(c) Sprawdź, czy  $v$  jest bijekcją.
3. **Zadanie** Dana jest funkcja  $f(x) = 2\ln(1+x) - \ln(x)$  zdefiniowana dla  $x > 0$ .
- (a) Znaleźć wszystkie punkty ekstremalne (tzn. maxima i minima), jeśli istnieją, oraz wartości  $f(x)$  w tych punktach.  
(b) Naskicować wykres  $y = f(x)$ .

4. **Zadanie.** Rozpatrzmy trzy populacje bakterii K, L, M, które w chwili początkowej są w tej samej fazie cyklu komórkowego. W ustalonych odstępach czasu  $t_0$  może dojść do podziału komórkowego. Przyjmujemy, że komórki mają dowolny dostęp do pożywienia oraz

- w populacji K wszystkie komórki dzielą się co  $t_0$  jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji L średnio tylko  $\frac{1}{4}$  komórek dzieli się co  $t_0$  jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji M średnio tylko  $\frac{1}{4}$  komórek dzieli się co  $t_0$  jednostek czasu, a pozostałe giną.

Określić stan  $n$  każdej z tych populacji w kolejnych momentach czasu  $t_0, 2t_0, 3t_0, \dots, kt_0$  oraz odpowiedzieć na pytanie: ile razy więcej jest komórek typu K w stosunku do L i M w momencie  $3t_0$ .

5. **Zadanie** Stężenie leku we krwi pacjenta od momentu podania przez godzinę rośnie liniowo, po czym osiąga maksymalną wartość 2 mmol/l i utrzymuje się na tym poziomie przez kolejne 2 godziny. Po tym czasie stężenie spada wykładniczo, przy czym po 4 godzinach od podania wynosi 1 mmol/l.

- Zapisz zależność  $k(t)$  stężenia leku we krwi pacjenta (w mmol/l) od czasu od momentu podania (w godzinach), wiedząc, że zależność ta jest funkcją ciągłą.
- Narysować wykres funkcji  $k = k(t)$ .
- Przez ile czasu stężenie leku będzie się utrzymywać na poziomie co najmniej 0,5 mmol/l?

*Wskazówka.* Szukana zależność będzie się wyrażać różnymi wzorami w trzech przedziałach argumentu  $t$ . Funkcja wykładnicza ma postać  $a \cdot b^t$  dla pewnych dodatnich parametrów  $a, b$ .

6. **Pytanie.** III zasada Volterry

7. **Pytanie.** Co to jest model matematyczny?