EGZAMIN 10 marca 2015: GRUPA P

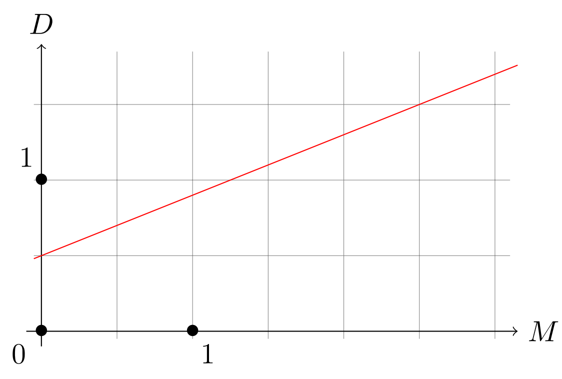
Drodzy Nasi Studenci: Powodzenia!!!

Każde zadanie **prosimy** rozwiązywać na **oddzielnej PODPISANEJ** kartce papieru!!! **Nie wolno** korzystać z książek, kalkulatorów, komputerów, laptopów, etc. Można natomiast korzystać z własnej kartki papieru („*ściągi*") ze wzorami! Aby otrzymać ocenę **dostateczną** wystarczy rozwiązać **poprawnie** jedno z zadań od 1 do 4. Na ostatnie (5) pytanie proszę odpowiedzieć **JEDNYM** zdaniem. Prawidłowa odpowiedź tylko na to 5 pytanie **nie** wystarczy do oceny **dostatecznej**.

1. **Zadanie**. Zależność średnicy d (w cm) od masy m (w gramach) owoców pewnej rośliny jest postaci

$$d(m) = a \cdot m^p \,,$$

dla pewnych stałych $a, p > 0$. Znany jest wykres tej zależności we współrzędnych **log–log** (logarytmiczno–logarytmicznych, tzn. na wykresie $M = \log m$, $D = \log d$):



(a) Zapisać wzorem przedstawioną na wykresie zależność $D = D(M)$.

(b) Wyznaczyć parametry a i p.

Przypomnienie: Dla dowolnych $x, y > 0$ zachodzi

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \quad \log(x^y) = y \log x \,.$$

Odpowiedź

Z zależności

$$d = am^p$$

mamy

$$\log d = \log a + p \log m\,,$$

czyli

$$D = A + pM\,, \qquad \text{gdzie} \quad A = \log a\,.$$

Z wykresu odczytujemy, że

$$M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D = \tfrac{1}{2}\,,$$

$$M = \tfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad D = \tfrac{3}{2}\,.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= A + 0 \cdot p\,, \\ \tfrac{3}{2} &= A + \tfrac{5}{2} \cdot p\,. \end{aligned}$$

Stąd

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad p = \frac{2}{5}\,.$$

Zatem odpowiedź na punkt (a), to

$$D = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}M\,.$$

Mamy

$$\frac{1}{2} = A = \log a\,.$$

Stąd

$$a = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\,,$$

$p = \frac{2}{5}$ było znalezione poprzednio. Reasumując, odpowiedź na punkt (b), to

$$a = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}\,, \qquad p = \frac{2}{5}\,.$$

Uwaga: Matematycy często oznaczają $\log = \log_e$ (czyli *logarytm naturalny*, zamiast standardowego oznaczenia ln). Wtedy a byłoby $a = \sqrt{e}$.

2. **Zadanie** W pewnym eksperymencie otrzymano n wyników: E_1 , E_2 , ... E_n. Funkcję Q określa wzór

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (E_i - x)^2 \ .$$

Znaleźć x_0, dla którego Q osiąga **minimum**. Czym jest otrzymany wynik?

Uwaga: Proszę nie zapominać o pokazaniu, że w danym x_0 jest rzeczywiście **minimum**!

Odpowiedź:

Mamy

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (E_i - x)^2 = (E_1 - x)^2 + (E_2 - x)^2 + \ldots + (E_n - x)^2 \ .$$

Zatem pochodna

$$Q'(x) = -2\,(E_1 - x) - 2\,(E_2 - x) - \ldots - 2\,(E_n - x) = 2nx - 2\,(E_1 + E_2 + \ldots + E_n) \ ,$$

czyli

$$Q'(x) = 2nx - 2\sum_{i=1}^{n} E_i \ .$$

Stąd

$$Q'(x_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i \ .$$

Dla $x < x_0$ mamy $Q'(x) < 0$ oraz dla $x > x_0$ mamy $Q'(x) > 0$. Zatem w punkcie $x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i$ jest **minimum**. Wielkość $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i$, to *średnia arytmetyczna* wyników E_1 , E_2 , ... E_n.

3. **Zadanie**. W pewnym eksperymencie podano 5 grupom osobników dawki pewnej substancji, w taki sposób, że dawki te tworzyły ciąg geometryczny. Wiedząc, że

   (a) pierwszej grupie podano dawkę 20 g,

   (b) drugiej grupie podano dawkę 50 g,

   (c) pozostałym grupom podano dawki $>$ 50 g, określić te dawki.

Odpowiedź:

Ciąg geometryczny określa wzór

$$n \longrightarrow aq^n\,.$$

Z treści zadania mamy $aq^0 = 20$ oraz $aq^1 = 50$. Stąd wyznaczamy

$$a = 20\,, \qquad \text{oraz} \qquad q = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}\,.$$

Kolejne dawki, to

$$aq^2 = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^3 = 125\,,$$
$$aq^3 = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 125 \cdot \frac{5}{2} = \frac{625}{2}\,,$$
$$aq^4 = 20 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{625}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3125}{4}\,.$$

4. **Zadanie**. Dla papużki *Molopsittacus undulatus* wydatek energii E (w $\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g \cdot km}}$) w locie dobrze opisuje wzór

$$E = \frac{1}{v}\Big(a(v-b)^2 + c\Big)\,,$$

gdzie v jest szybkością papużki (w $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$), $a = 0,074\,\frac{\mathrm{cal \cdot h}}{\mathrm{g \cdot km^2}}$, $b = 35\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ oraz $c = 22\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g \cdot h}}$. Znaleźć szybkość dla której wydatek energii jest najmniejszy.

Odpowiedź:

E wygodnie jest przedstawić w postaci

$$E = av - 2ab + \frac{ab^2 + c}{v}\,.$$

Mamy więc pochodną

$$E' = a - \frac{ab^2 + c}{v^2}\,.$$

Zatem

$$E' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{ab^2 + c}{a}\,.$$

Dziedziną funkcji (domyślnie) jest $v > 0$, gdyż v to szybkość, zatem jedynym punktem, w którym pochodna E' się zeruje jest $v_0 = \sqrt{\frac{ab^2+c}{a}}$. Łatwo sprawdzić, że dla $0 < v < v_0$ pochodna E' jest ujemna, a dla $v > v_0$ pochodna jest dodatnia, a zatem w punkcie v_0 funkcja E przyjmuje **minimum**. Lecąc z szybkością v_0 papużka najmniej się męczy!

5. **Pytanie**. Czym różni się krzywa saturacji dla mioglobiny od krzywej saturacji dla hemoglobiny?

   Odpowiedź:

   Krzywa saturacji dla mioglobiny nie ma punktu przegięcia, a krzywa dla hemoglobiny — ma (jeden punkt przegięcia).

   Dodatkowy komentarz:

   Krzywa saturacji dla hemoglobiny ma typowy kształt *sigmoidalny*. Tłumaczone to jest wewnętrznym oddziaływaniem pomiędzy 4 hemami. W przypadku mioglobiny nie ma co oddziaływać!