

EGZAMIN 28 stycznia 2015: GRUPA E

Drodzy Nasi Studenci: Powodzenia!!!

Proszę nie nastawiać się na rozwiązanie WSZYSTKICH zadań, lecz wybrać te, które są Państwu najbliższe! Aby otrzymać ocenę **dostateczną** wystarczy rozwiązać **poprawnie** jedno z zadań od 1 do 5. Każde zadanie **prosimy** rozwiązywać na **oddzielnej PODPISANEJ** kartce papieru. **Nie wolno** korzystać z książek, kalkulatorów, komputerów, laptopów, etc. Można natomiast korzystać z własnej kartki papieru („ściągę”) ze wzorami! Na dwa ostatnie (6 i 7) pytania proszę odpowiedzieć **JEDNYM** krótkim zdaniem. Prawidłowe odpowiedzi na te (6 i 7) pytania **nie** wystarczą do oceny **dostatecznej** — mogą natomiast podwyższyć pozytywną ocenę.

1. **Zadanie.** Dana jest funkcja $f(x) = e^{-x} - 2e^{-2x}$ zdefiniowana dla $x \geq 0$.
 - (a) Znaleźć wszystkie punkty ekstremalne (tzn. maxima i minima), jeśli istnieją, oraz wartości $f(x)$ w tych punktach.
 - (b) Naszkicować wykres $y = f(x)$.
2. **Zadanie** Stężenie leku we krwi pacjenta od momentu podania przez godzinę rośnie liniowo, po czym osiąga maksymalną wartość 1 mmol/l i utrzymuje się na tym poziomie przez kolejne 3 godziny. Po tym czasie stężenie spada wykładniczo, przy czym po 5 godzinach od podania wynosi 0,5 mmol/l.
 - (a) Zapisać zależność $c(t)$ stężenia leku we krwi pacjenta (w mmol/l) od czasu od momentu podania (w godzinach), wiedząc, że zależność ta jest funkcją ciągłą.
 - (b) Narysować wykres $c = c(t)$.
 - (c) Przez jaki czas stężenie leku będzie się utrzymywać na poziomie co najmniej 0,25 mmol/l?

Wskazówka. Szukana zależność będzie się wyrażać różnymi wzorami w trzech przedziałach argumentu t . Funkcja wykładnicza zapisuje się w postaci $a \cdot b^t$ dla pewnych dodatnich parametrów a, b .

3. **Zadanie.** Rozpatrzmy trzy populacje bakterii A, B, C, które w chwili początkowej są w tej samej fazie cyklu komórkowego. W ustalonych odstępach czasu T może dojść do podziału komórkowego. Przyjmujemy, że komórki mają dowolny dostęp do pożywienia oraz

- w populacji A wszystkie komórki dzielą się co T jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji B średnio tylko połowa komórek dzieli się co T jednostek czasu i żadna nie ginie,
- w populacji C średnio tylko połowa komórek dzieli się co T jednostek czasu, a pozostałe giną.

Określić stan N każdej z tych populacji w kolejnych momentach czasu $T, 2T, 3T, \dots, nT$ oraz odpowiedzieć na pytanie: ile razy więcej jest komórek typu A w stosunku do B i C w momencie $4T$.

4. **Zadanie.** Na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozważamy relację ρ zdefiniowaną następująco:

$$(a, b) \rho (x, y) \iff a + y = b + x.$$

Sprawdzić, czy ρ jest relacją równoważności. Narysować wykres dla relacji ρ obciętej do zbioru $\{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ (tzn. wykres powinien uwzględniać tylko te punkty i żadne inne).

5. **Zadanie.** Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu: $C + X \xrightarrow{k} X$. Szybkość tej reakcji dana jest wzorem:

$$v(x) = kx(c - x),$$

gdzie $x > 0$ jest stężeniem związku X , a k i c są pewnymi stałymi dodatnimi.

- Wyznacz stężenie x_0 związku X , dla którego szybkość reakcji jest największa.
- Zbadaj monotoniczność funkcji v .
- Sprawdź, czy v jest bijekcją.

6. **Pytanie.** III zasada Volterry

7. **Pytanie.** Co to jest model matematyczny?