

EGZAMIN 28 stycznia 2015: GRUPA E zadanie 5

Pewien związek chemiczny podlega reakcji autokatalitycznej według uproszczonego schematu: $C + X \xrightarrow{k} X$. Szybkość tej reakcji dana jest wzorem:

$$v(x) = kx(c - x),$$

gdzie $x > 0$ jest stężeniem związku X , a k i c są pewnymi stałymi dodatnimi.

- Wyznacz stężenie x_0 związku X , dla którego szybkość reakcji jest największa.
- Zbadaj monotoniczność funkcji v .
- Sprawdź, czy v jest bijekcją.

Rozwiązanie. Mamy

$$v(0) = v(c) = 0,$$

oraz

$$v'(x) = kc - 2kx.$$

Stąd $v'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \frac{c}{2}$. Ponadto

$$v'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0, \frac{c}{2}),$$

$$v'(x) < 0 \text{ dla } x > \frac{c}{2}.$$

Zatem

- Dla $x = \frac{c}{2}$ jest maksimum;
- $v = v(x)$ rośnie na $(0, \frac{c}{2})$ i maleje na $(\frac{c}{2}, \infty)$;
- $v = v(x)$ nie jest bijekcją, gdyż nie jest nawet różnowartościowa.