Zadanie 1. grupa Q. Na zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ rozważamy relację ρ zdefiniowaną następująco:

$$(a,b)\,\rho\,(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad ay = bx\,.$$

Sprawdzić, czy ρ jest relacją równoważności. Narysować wykres dla relacji ρ obciętej do zbioru $\big\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,6)\big\}$ (tzn. wykres powinien uwzględniać tylko te punkty i żadne inne).

Sprawdzenie czy ρ jest relacją równoważności (1 ptk). Relacja jest zwrotna, ponieważ dla dowolnego $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi $ab = ba$ czyli $(a,b)\rho(a,b)$. Relacja jest też symetryczna, ponieważ jeżeli $(a,b)\rho(x,y)$, to z definicji relacji $ay = bx$ co jest oczywiście równoważne $xb = ya$, tzn $(x,y)\rho(a,b)$. Ponadto relacja jest przechodnia, ponieważ jeżeli $(a,b)\rho(x,y)$ oraz $(x,y)\rho(z,w)$, to z definicji $ay = bx$ oraz $xw = yz$. Mnożąc te równości stronami otrzymujemy $ayxw = bxyz$ a dzieląc stronami przez xy mamy ostatecznie $aw = bz$, tzn. $(a,b)\rho(z,w)$. Pokazaliśmy, że ρ jest relacją równoważności.

Wykres relacji (1 ptk). Należało narysować punkty $(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,6)$ (niekoniecznie w układzie współrzędnych) i nanieść strzałki między tymi punktami w taki sposób, że

- między punktami $(1,1),(2,2)$ była strzałka skierowana w obie strony,
- między punktami $(1,2),(2,4),(3,6)$ były wszystkie możliwe strzałki skierowane w każde możliwe strony,
- od punktu $(2,1)$ nie było strzałki do innych punktów,
- ponadto każdy punkt miał pętlę (tzn. strzałkę wychodzącą z i wchodzącą do tego samego punktu),
- oprócz powyższych strzałek nie było już zadnych innych.

Zadanie 4. grupa E. Na zbiorze $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ rozważamy relację ρ zdefiniowaną następująco:

$$(a,b)\,\rho\,(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad a+y = b+x.$$

Sprawdzić, czy ρ jest relacją równoważności. Narysować wykres dla relacji ρ obciętej do zbioru $\big\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,4)\big\}$ (tzn. wykres powinien uwzględniać tylko te punkty i żadne inne). **Sprawdzenie czy ρ jest relacją równoważności (1 ptk).** Rozwiązujemy tak jak zadanie 1. z grupy Q (patrz powyżej) z tą różnicą że każdą operację mnożenia zamieniamy na dodawanie a dzielenia na odejmowanie.

Wykres relacji (1 ptk). Należało narysować punkty $(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,4)$ (niekoniecznie w układzie współrzędnych) i nanieść strzałki między tymi punktami w taki sposób, że

- między punktami $(1,1),(2,2)$ była strzałka skierowana w obie strony,

- między punktami $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ były wszystkie możliwe strzałki skierowane w każde możliwe strony,
- od punktu $(2, 1)$ nie było strzałki do innych punktów,
- ponadto każdy punkt miał pętlę (tzn. strzałkę wychodzącą z i wchodzącą do tego samego punktu),
- oprócz powyższych strzałek nie było już zadnych innych.