Rozwiązania zadań z egzaminu

Grupa E:

Zadanie 1E.

Dana jest funkcja $f(x) = e^{-x} - 2e^{-2x}$ zdefiniowana dla $x \geq 0$.

a) Znaleźć wszystkie punkty ekstremalne (tzn. maxima i minima), jeśli istnieją, oraz wartości $f(x)$ w tych punktach.

b) Naszkicować wykres $y = f(x)$.

Rozwiązanie.

a) Pochodna funkcji $f(x)$ wynosi:

$f'(x) = -e^{-x} + 4e^{-2x} = -e^{-x}(1 - 4e^{-x})$.

Warunek na istnienie ekstremum to $f'(x) = 0$, co zachodzi dla x spełniających równanie

$e^x = 4$,

czyli dla $x = \ln 4$. Określimy czy jest to maksimum czy minimum w oparciu o znak pochodnej. Pochodna jest dodatnia, tzn. $f'(x) > 0$, tam gdzie $f(x)$ rośnie. Ma to miejsce dla x w przedziale $(0,\ln 4)$. Pochodna jest ujemna, czyli $f(x)$ maleje, dla x w przedziale $(\ln 4, \infty)$. Oznacza to, że funkcja $f(x)$ ma maksimum w punkcie $x = \ln 4$.

Wartość funkcji w tym punkcie wynosi

$f(\ln 4) = e^{\ln(1/4)} - 2e^{\ln(1/16)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$.

b) Aby naszkicować wykres $y = f(x)$ potrzeba określić wartości funkcji $f(x)$ na brzegach, tzn. dla $x = 0$ i dla $x \mapsto \infty$, oraz skorzystać z powyżej określonych przedziałów zmienności funkcji $f(x)$. Potrzeba także znaleźć miejsca zerowe $f(x)$.

Na brzegach $f(x)$ przyjmuje wartości:

$f(0) = e^0 - 2e^0 = 1 - 2 = -1$,

$f(\infty) = lim_{x \mapsto \infty}(e^{-x} - 2e^{-2x}) = 0 + 0$, ponieważ $e^{-\infty} = 0$.

Miejsca zerowe $f(x)$ odpowiadają przecięciu osi x przez wykres $y = f(x)$. Występują one dla x spełniających równanie $f(x) = 0$, czyli dla

$e^{-x} = 2e^{-2x}$.

Mnożąc obie strony przez e^{2x} dostajemy $e^x = 2$. Stąd $x = \ln 2$.

Wszystkie te informacje wystarczają aby naszkicować wykres $y = f(x)$.

Grupa Q:

Zadanie 3Q.

Dana jest funkcja $f(x) = 2\ln(1 + x) - \ln(x)$ zdefiniowana dla $x > 0$.

a) Znaleźć wszystkie punkty ekstremalne (tzn. maxima i minima), jeśli istnieją, oraz wartości $f(x)$ w tych punktach.

b) Naszkicować wykres $y = f(x)$.

Rozwiązanie.

a) Pochodna funkcji $f(x)$ wynosi:

$f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x(x+1)}$.

Warunek na istnienie ekstremum to $f'(x) = 0$, co zachodzi dla $x = 1$. Określimy czy jest to maksimum czy minimum w oparciu o znak pochodnej. Pochodna jest dodatnia, tzn. $f'(x) > 0$, tam gdzie $f(x)$ rośnie. Ma to miejsce dla x w przediale $(1,\infty)$. Pochodna jest ujemna, czyli $f(x)$ maleje, dla x w przedziale (0,1). Oznacza to, że funkcja $f(x)$ ma minimum w punkcie $x = 1$.

Wartość funkcji w tym punkcie wynosi

$f(1) = 2\ln(2) - \ln(1) = 2\ln(2) > 0.$

b) Aby naszkicować wykres $y = f(x)$ potrzeba określić wartości funkcji $f(x)$ na brzegach, tzn. dla $x = 0$ i dla $x \mapsto \infty$, oraz skorzystać z powyżej określonych przedziałów zmienności funkcji $f(x)$. Potrzeba także znaleźć miejsca zerowe $f(x)$.

Na brzegach $f(x)$ przyjmuje wartości:

$f(0) = 2\ln(1) - \ln(0) = 0 + \infty = \infty$

$f(\infty) = lim_{x\mapsto\infty}(2\ln(1+x) - \ln(x)) = lim_{x\mapsto\infty} \ln(x)(2\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} - 1) = (2-1)\ln(\infty) = \infty,$

ponieważ

$lim_{x\mapsto\infty} \frac{2\ln(1+x)}{\ln(x)} = 2lim_{x\mapsto\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 2.$

Funkcja $f(x)$ nie posiada miejsc zerowych, ponieważ najmniejsza wartość $f(x)$ (jej wartość w minimum) jest dodatnia (powyżej osi x).

Wszystkie te informacje wystarczają aby naszkicować wykres $y = f(x)$.