Praca Domowa na 10.06.2019

May 14, 2019

Terminy oddania pracy domowej to 10.06.2019 (godz 20:00) . Pracę można złożyc w mojej skrytce w/przy instytucie matematyki. Jeżeli praca będzie oddana drogą mailową prosze w tytule wpisac Praca Domowa AMII i wysłać jako jeden plik pdf.

Zadanie 1. *(2,5 pkt)*

Dla jakich $a > 0$ funkcja $\frac{1}{|x-y+z|^a}$ (określona prawie wszędzie na $\mathbb{R}^3$) jest całkowalna na zbiorze:

(a) $\{(x,y,z):\quad 0 < |x|, |y|, |z| < 1\}$, (b) $\{(x,y,z):\quad x > 10, |y|, |z| < 1\}$.

Zadanie 2. *(2,5 pkt)*

Udowodnić, że jeśli krzywa $\gamma\colon [7,9] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, klasy C^1, nie przechodzi przez punkt $(0,0)$ i spełnia warunki: $7 \leqslant s < t < 9 \Longrightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$ i $\gamma(7) = \gamma(9)$, to

$$\int_\gamma \frac{(x^3 - 3xy^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2y - y^3)\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.$$

Zadanie 3. *(2,5 pkt)*

Obliczyć całkę formy różniczkowej $\omega = \frac{2xy\,dx - (x^2+y^2)dy}{y^2}$ wzdłuż łuku krzywej określonej równaniem $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{6}\sqrt{x^2+y^2}$, mającego początek $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ i koniec $(1, \sqrt{3})$, położonego w ćwiartce $\{(x,y):\quad x, y > 0\}$.

Zadanie 4. *(2,5 pkt)(z robieniem poczekać na wykład chwilkę)*

Niech $U = \{(x,y,z):\quad x^2+y^2 > 0\}$, $H_t = \{x^2+y^2-z^2 = t\}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
Znaleźć taką 2-formę różniczkowa ω na U, że jeśli $\mathbf{p} \in H_t$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}H_t$, to $|\omega(\mathbf{v},\mathbf{w})|$ jest polem równoległoboku rozpiętego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$.
Oblicz całkę $\int_G d\omega$, gdzie $G = \{(x,y,z):\quad x^2+y^2 < z^2 \quad \text{i} \quad 0 < z < 1\}$.

Zadanie 5. *(2,5 pkt)*

Obliczyć całkę z 2–formy $\omega = (y^2-x^2)dy\wedge dz+(z-x)dz\wedge dx+(2xz-y)dx\wedge dy$ po powierzchni S powstałej w wyniku obrotu cykloidy opisanej parametrycznie: $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 0$, $z(t) = 1-\cos t$, $0 \le t \le \pi$, wokół prostej $x = \pi$, $y = 0$ (wektor normalny w punkcie $(\pi, 0, 2)$ orientujący S to $[0, 0, 1]$).

Zadanie 6. *(2,5 pkt)*

Niech X będzie zbiorem tych dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły w otoczeniu kuli domkniętej $\overline{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 \le 2106^2\}$ funkcji o wartościach rzeczywistych, których zerują się we wszystkich punktach sfery $\partial B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\colon \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2 = 2106^2\}$. W przestrzeni liniowej X definiujemy iloczyn skalarny wzorem: $\langle f \mid g\rangle = \int_B fg\,d\ell_k$. Niech $\triangle f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x})$.
Udowodnić, że dla każdej funkcji $f \in X$ zachodzi nierówność $\langle \triangle f \mid f\rangle \le 0$, przy czym staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{x}) = 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in B$.