LICZBY ZESPOLONE

W tym rozdziale zajmiemy się omówieniem definicji i niektórych własności liczb zespolonych. Zaczniemy od uwagi o charakterze historycznym.

W XVI w. nauczono się rozwiązywać równania trzeciego stopnia. Każde równanie postaci $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdzie $a \neq 0$, można zastąpić równaniem postaci $y^3 + py + q = 0$: należy podzielić równanie przez liczbę a, następnie wprowadzić zmienną $y = x + \frac{b}{3a}$.[28.1] Niech $y = u + v$. Mamy wtedy

$$0 = y^3 + py + q = =u^3 + v^3 + q + (p + 3uv)(u + v).$$

Dobierzemy liczby u i v tak, by $u^3 + v^3 = -q$ i $uv = -\frac{p}{3}$, czyli $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Liczby u^3, v^3 mają więc być pierwiastkami równania kwadratowego $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, więc np.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} \text{ i } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}.$$

Wtedy $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$.

Otrzymaliśmy wzór na pierwiastek równania trzeciego stopnia. Pokażemy natomiast, że stosowanie tego wzoru może być kłopotliwe. Niech $p = -7$, $q = -6$, rozwiązujemy więc równanie $x^3 - 7x - 6 = 0$. Mamy

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = \left(\frac{-7}{3}\right)^3 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = -\frac{343}{27} + 9 = -\frac{100}{27} < 0.$$

Teraz z tej liczby należy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Ten pierwiastek nie jest liczbą rzeczywistą! Można pomyśleć, że to dlatego, że nasze równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych. Tak jednak nie jest, bo $(-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = 0$, $(-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 6 = 0$ i $3^3 - 7 \cdot 3 - 6 = 0$, więc nasze równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste! Czytelnik zechce sprawdzić, że jeśli y_1, y_2, y_3 są pierwiastkami równania $y^3 + py + q = 0$, czyli gdy $y^3 + py + q = =(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$, to zachodzi równość:

[28.1] Podobnie postępowaliśmy chcąc rozwiązać równanie kwadratowe, tam nową zmienną było $x + \frac{b}{2a}$. Podstawienie jest skuteczne, bo $y^3 = (x + \frac{b}{3a})^3 = =x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{b^2}{3a^2}x + \frac{b^3}{27a^3}$, więc ten składnik zawiera dwa pierwsze człony lewej strony równania.

$$-\frac{1}{108}(y_1-y_2)^2(y_2-y_3)^2(y_3-y_1)^2=\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}.$$

Wynika stąd, że jeśli równanie ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to wzoru stosować się nie da. Poszukiwania innych wzorów nie dały rezultatu. Zaczęto zakładać, że istnieje pierwiastek kwadratowy z liczby -1, którego nie było, ale był wygodny w użyciu. Wreszcie liczby zespolone, których nie było, zinterpretowano jako punkty płaszczyzny i pogodzono się z nimi.[28.2] Do dziś została nazwa: liczby urojone — to pierwiastki kwadratowe z ujemnych liczb rzeczywistych. Dziś trudno sobie wyobrazić matematykę bez nich.

Definicja 28.1 (liczb zespolonych)
Liczbami zespolonymi nazywamy liczby postaci $a+bi$, gdzie i oznacza jednostkę urojoną, przyjmujemy, że $i^2=-1$ zaś a i b są liczbami rzeczywistymi. Suma liczb zespolonych $z_1=a+bi$ i $z_2=c+di$ to $z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$, ich iloczyn to $z_1z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczany jest na całym świecie [28.3] przez $\mathbb{C}$. ■

Twierdzenie 28.2
Zbiór liczb zespolonych jest ciałem, tzn.

D1 Dla dowolnych liczb $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ — dodawanie jest łączne.

D2 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $z+0=z$, gdzie $0=0+0\cdot i$.

D3 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ istnieje taka liczba $w\in\mathbb{C}$, że $z+w=0$ — istnienie liczby przeciwnej.

D4 Dla dowolnych $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ zachodzi $z_1+z_2=z_2+z_1$ — dodawanie jest przemienne.

M1 Dla dowolnych $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ zachodzi $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ — mnożenie jest łączne.

M2 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $z\cdot 1=z$ — charakteryzacja jedynki, gdzie $1=1+0\cdot i$.

M3 Dla każdej liczby $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ istnieje taka liczba $w\in\mathbb{C}$, że

[28.2] Zrobili to różni ludzie. Przyjmuje się, że największy wkład miał Jean–Robert Argand, choć długo nie wymieniano jego nazwiska, m. in. cytował go A. Cauchy, ale bez wymieniania nazwiska.

[28.3] z wyjątkiem polskich szkół średnich

$z \cdot w = 1$ — istnienie liczby odwrotnej.

M4 Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ — mnożenie jest przemienne.

MD Równość $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ zachodzi dla dowolnych $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Dowód. Niech $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ i $z_j = a_j + b_j$ dla $j = 1, 2, 3$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Wtedy $(z_1 + z_2) + z_3 = \big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\big) + +(a_3 + b_3 i) = \big((a_1 + a_2) + a_3\big) + \big((b_1 + b_2) + b_3\big)i = = \big(a_1 + (a_2 + a_3)\big) + \big(b_1 + (b_2 + b_3)\big)i = (a_1 + b_1 i) + \big((a_2 + a_3) + +(b_2 + b_3)i\big) = z_1 + (z_2 + z_3)$, co kończy dowód łączności dodawania.

W taki sam sposób sprawdzić można, że zachodzą własności D2, D3, D4, M1, M3, M4, MD. Oznaczenia $0 = 0 + 0 \cdot i$ oraz $1 = 1 + 0 \cdot i$ są bardzo naturalne, co więcej zamiast pisać $a + 0 \cdot i$, będziemy pisać a.

Nie wymieniliśmy własości M3, bo dowód tej jest nieco inny. Niech $z = x + yi \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Niech $w = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i$. Wtedy $z \cdot w = (x+yi)\big(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \cdot i\big) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2} + 0 \cdot i = 1$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 28.3 $\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2-(yi)^2} = \frac{x-yi}{x^2-y^2i^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$ — ten rachunek wyjaśnia, jak znaleźliśmy $\frac{1}{z}$ w dowodzie poprzedniego twierdzenia. ■

Definicja 28.4 (części rzeczywistej i urojonej)
Liczby postaci bi, $b \in \mathbb{R}$ nazywać będziemy urojonymi. Liczbę $a \in \mathbb{R}$ nazywamy częścią rzeczywistą liczby $z = a + bi$, piszemy $\operatorname{Re} z = a$; liczbę $b \in \mathbb{R}$ – częścią urojoną liczby $z = a + bi$, piszemy $\operatorname{Im} z = b$. ■

Dzięki tej definicji liczby rzeczywiste to szczególne liczby zespolone — „te w których nie ma i".

Definicja 28.5 (różnicy)
Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 istnieje dokładnie jedna liczba zespolona z taka, że $z_1 + z = z_2$. Nazywana jest różnicą liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $z_2 - z_1$. ■

Definicja 28.6 (ilorazu)
Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1 \neq 0$ i z_2 istnieje dokładnie jedna liczba zespolona z taka, że $z_1 z = z_2$. Liczba ta zwana jest ilorazem liczb z_2 i z_1 i oznaczana symbolem $\frac{z_2}{z_1}$ lub z_2/z_1.

Wykazaliśmy wszystkie podstawowe własności działań. Oczywiście $0 \neq 1$. Wobec tego wszystkie wnioski dotyczące działań w zbiorze liczb rzeczywistych wyprowadzone z aksjomatów bez użycia tych, w których dowodach używana była nierówność, zachodzą w zbiorze liczb zespolonych. Np. zachodzą równości $1 \cdot z = z$, $0 \cdot z = 0$ i $0 + z = z$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Liczby zespolone możemy więc dzielić:

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(c+di)(a-bi)}{a^2-(bi)^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2i^2} =$$
$$= \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2-b^2(-1)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\,.$$

Niestety, nie wszystko jest tak jak w przypadku liczb rzeczywistych. W zbiorze $\mathbb{C}$ nie można w sensowny sposób wprowadzić nierówności. Nadamy temu zdaniu postać twierdzenia, a następnie udowodnimy je.

Twierdzenie 28.7 (o nieistnieniu nierówności)
W zbiorze $\mathbb{C}$ nie istnieje relacja $\prec$ taka, że:
1. jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, to zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: $\mathbf{z}_1 = z_2$ albo $z_1 \prec z_2$ albo $z_2 \prec z_1$;
2. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z_2 \prec z_3$, to $z_1 \prec z_3$;
3. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $z \in \mathbb{C}$, to $z_1 + z \prec z_2 + z$;
4. jeśli $z_1 \prec z_2$ i $0 \prec z$, to $zz_1 \prec zz_2$.

Dowód. Załóżmy bowiem, że udało nam się w jakiś sposób zdefiniować nierówność $\prec$ w taki sposób, że spełnione są warunki 1 – 4. Wtedy kwadraty liczb różnych od 0 są dodatnie — to wywnioskowaliśmy z pewników, użytych do budowy teorii liczb rzeczywistych, a te wszystkie pewniki byłyby spełnione z tym że standardowa nierówność $<$ byłaby zastąpiona przez $\prec$. Mamy $1^2 = 1$ i $i^2 = -1$, zatem $0 \prec 1$ i jednocześnie $0 \prec -1$, zatem $0 \prec 1$ i $0 \prec -1$. Dodając te nierówności stronami otrzymujemy $0 \prec -1 \prec (-1) + 1 = 0$, co przeczy warunkowi 1. Dowód został zakończony. ■

Okazało się więc, że liczb zespolonych porównywać się nie da. Można oczywiście definiować jakieś nierówności między liczbami zespolonymi rezygnując z części warunków 1 – 4, ale nie są one użyteczne, więc mało kto to robi.

Liczby zespolone można traktować jako punkty płaszczyzny. Przyjmujemy, że część rzeczywista liczby zespolonej to pierwsza współrzędna (czyli pozioma), a część urojona to druga współrzędna (pionowa) punktu płaszczyzny. Przy takiej interpretacji suma $z_1 + z_2$ liczb zespolonych może być potraktowana jako koniec wektora, który jest sumą wektorów $\overrightarrow{0z_1}$ i $\overrightarrow{0z_2}$.

Definicja 28.8 (wartości bezwzględnej i argumentu)
Wartością bezwzględną $|z|$ liczby zespolonej $z = a+bi$ nazywamy liczbę $\sqrt{a^2+b^2}$, jej argumentem $\operatorname{Arg} z$ — dowolną taką liczbę φ, że $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ■

Z definicji wynika, że $|z|$ to odległość punktu z od punktu 0, a argument liczby z, to kąt między wektorami $\overrightarrow{01}$ i $\overrightarrow{0z}$ mierzony „w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara”.

Przykład 28.1 $\operatorname{Arg} 2 = 0$ lub $\operatorname{Arg} 2 = 2007\pi$, $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$ lub $\operatorname{Arg} i = -\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{Arg}(-1+i) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$, $|2| = 2 = |-2| = |2i| = |-2i|$, $|1+i| = |-1+i| = |1-i| = |-1-i| = \sqrt{2}$. ■

Twierdzenie 28.9 (Nierówność trójkąta)
Nierówność $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ zachodzi dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2. Staje się ona równością jedynie wtedy, gdy punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom $0, z_1, z_2$ leżą na jednej prostej, przy czym 0 nie leży między[28.4] z_1 i z_2. ■

Dowód. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, b_1, a_2, b_2 zachodzi znana nam nierówność (wynika z nierówności Schwarza)

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2},$$

staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista $t \geqslant 0$ taka, że $z_1 = tz_2$ lub $z_2 = tz_1$.

Z równości $z = a+bi$, $r = |z|$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ oraz $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ wynika, że $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Zapisaliśmy liczbę z w *postaci trygonometrycznej.*

[28.4] nieostro, jedna z liczb z_1, z_2 może być zerem

Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Wtedy
$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\big) =$
$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że wartość bezwzględna iloczynu dwu liczb zespolonych równa jest iloczynowi ich wartości bezwzględnych, a argument iloczynu dwu liczb zespolonych równy jest sumie ich argumentów. Stosując otrzymany wzór wielokrotnie otrzymujemy

Twierdzenie 28.10 (Wzór de Moivre'a)

$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$. ■

Z tego wzoru wynika, że dla każdej liczby zespolonej $w \neq 0$ i każdej liczby naturalnej n istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych z_1, $z_2, \ldots, z_n$ takich, że $z_j^n = w$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Załóżmy bowiem, że $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Z dwu równości $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $w = z^n$ wynikają następne $\varrho = r^n$ oraz $n\varphi = \psi + 2k\pi$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wynika stąd, że $r = \sqrt[n]{\varrho}$, r jest więc wyznaczone jednoznacznie. Musi też być $\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Zastępując liczbę k liczbą $k+n$ zwiększamy kąt φ o 2π, co nie zmienia liczby z. Różne liczby z otrzymujemy przyjmując kolejno $k = 0$, $k = 1, \ldots$, $k = n-1$. Otrzymujemy więc dokładnie n różnych wartości. Łatwo zauważyć, że odpowiadające im punkty płaszczyzny są wierzchołkami n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{\varrho}$. Jeśli $w = 1$, to wśród tych liczb jest liczba 1.

Definicja 28.11 (pierwiastka algebraicznego z liczby zespolonej)
Algebraicznym pierwiastkiem n–tego stopnia z liczby zespolonej w nazywamy każdą liczbę zespoloną z, dla której $w = z^n$. ■

Przykład 28.2 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 2 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$ są dwie liczby: $z_1 = \cos\frac{0\pi}{2} + i\sin\frac{0\pi}{2} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ i $z_2 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$. ■

Przykład 28.3 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $1 = \cos 0 + i\sin 0$ są trzy liczby: $z_1 = \cos\frac{0\pi}{3} + i\sin\frac{0\pi}{3} = 1$,

$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 28.4 Pierwiastkami algebraicznymi stopnia 3 z liczby $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ są trzy liczby:
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3} = -1$ oraz $z_3 = \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 28.5 Ponieważ $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha$, części rzeczywiste są równe i części urojone są równe, więc zachodzą równości $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. ■

Przykład 28.6 Z równości: $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 =$

$$= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + +i^3\sin^3\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i\bigl(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\bigr)$$

wynika, że

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\,.$$

Widzimy więc, że za pomocą liczb zespolonych można powiązać wzory na $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ z dwumianem Newtona.

Definicja 28.12 (sprzężenia)
Jeśli $z = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, to liczbę $\overline{z} = a-bi$ nazywamy sprzężoną do liczby z. ■

$\overline{2-3i} = 2+3i$, $\overline{13} = 13$, $\overline{i} = -i$. Liczba z jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \overline{z}$. Jeśli $z \notin \mathbb{R}$, to $\overline{z} \in \mathbb{C}$ jest jedyną liczbą taką, że $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$ i jednocześnie $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$. Prosty dowód tego stwierdzenia Czytelnicy przeprowadzą samodzielnie.

Mamy też $z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$, $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}\,z$ oraz $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,z$. Możemy więc napisać

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})\,.$$

Punkty płaszczyzny odpowiadające liczbom z i $\overline{z}$ są symetryczne względem osi rzeczywistej.

Przypomnijmy, że argument iloczynu dwu liczb zespolonych równy jest sumie argumentów składników. Jest to własność przypominające logarytm (logarytm iloczynu to suma logarytmów jego czynników). Logarytm to wykładnik potęgi. Zdefiniujemy teraz potęgę o podstawie e.

Definicja 28.13 (potęgi o wykładniku zespolonym)
$e^z = e^{x+iy} = e^x\big(\cos y + i\sin y\big)$ dla dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 28.7 $e^{\pi i} = e^{0+\pi i} = e^0\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -1$,
$e^{\ln 2+\pi i} = e^{\ln 2}\big(\cos\pi + i\sin\pi\big) = -2$,
$e^{\ln 2} = e^{\ln 2+0i} = e^{\ln 2}\big(\cos 0 + i\sin 0\big) = 2$. ■

Przykłady można mnożyć. Zauważmy, że jeśli $z = x + iy$, $w = u + iv$, gdzie $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, to
$e^{z+w} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}\big(\cos(y+v) + i\sin(y+v)\big) =$
$= e^x e^u\big(\cos y + i\sin y\big)\big(\cos v + i\sin v\big) =$
$= e^x\big(\cos y + i\sin y\big)e^u\big(\cos v + i\sin v\big) = e^z e^w$.
Widzimy więc, że właśnie zdefiniowanej potędze liczby e przysługuje podstawowa własność potęg. Definicję potęgi stopniowo rozszerzaliśmy: najpierw wykładniki były naturalne, potem całkowite i ujemne ujemnych, potem dowolne wymierne. Potęga o wykładniku rzeczywistym określiliśmy tak, by zachować monotoniczność i równość $e^{a+b} = e^a e^b$. Ponieważ zajmujemy się liczbami zespolonymi, więc nie można mówić o monotoniczności — w zbiorze liczb zespolonych nie ma nierówności. Zamiast monotoniczności można zażądać istnienia pochodnej w punkcie 0.

Definicja 28.14 (granicy funkcji)
Jeśli $h\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją określoną na zbiorze $G \subseteq \mathbb{C}$ i z_0 jest punktem skupienia zbioru G, to $\lim\limits_{z\to z_0} h(z) = g \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{|z-z_0|\to 0}\big|h(z) - g\big| = 0$. ■

W ostatnim wyrażeniu liczby zespolone występują tylko pozornie[28.5], więc to ostatnie pojęcie nie jest nam obce. Ta definicja jest prostym uogólnieniem pojęcia granicy znanego z przypadku

[28.5] wartości bezwzględne są liczbami rzeczywistymi!

rzeczywistego — chodzi o to, że jeśli odległość między z i z_0 jest dostatecznie mała, to odległość między $h(z)$ i g też jest mała.

Zaczniemy od podania zespolonych wersji kilku znanych definicji i twierdzeń o granicach ciągów.

Definicja 28.15 (granicy ciągu)
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$. ■

Stwierdzenie 28.16 Jeśli $z_n = x_n + y_n i$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $g = x + yi$, $x, y, \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Dowód. Mamy $|z_n - z| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geqslant |x_n - y|$ i $|z_n - z| \geqslant |y_n - y|$, więc jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$, to również $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - y| = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Jeśli natomiast $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = 0$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. ■

Twierdzenie 28.17 Ciąg (z_n) ma granicę skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbb{N}} \forall_{k,\ell>n_\varepsilon} |z_k - z_\ell| < \varepsilon. \tag{wC}$$

Dowód. Jeśli $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, to ciąg (z_n) spełnia (wC), bowiem $|z_k - z_\ell| \leqslant |z_k - z| + |z - z_\ell|$.

Jeśli ciąg (z_n) spełnia (wC), to ciągi (x_n) i (y_n) też spełniają (wC), bo $|x_k - x_\ell| \leqslant |z_k - z_\ell|$ i $|y_k - y_\ell| \leqslant |z_k - z_\ell|$. Są więc zbieżne, zatem ciąg (z_n) też jest zbieżny. ■

Twierdzenie 28.18 (Bolzano–Weierstrassa)
Z każdego ciągu ograniczonego (z_n), czyli takiego, że istnieje takie $M \geqslant 0$, że $|z_n| \leqslant M$ dla każdego n, można wybrać podciąg zbieżny.

Dowód. Niech $z_n = x_n + y_n i$. Wtedy $|x_n| \leqslant M$ i $|y_n| \leqslant M$. Z ciągu (x_n) wybieramy podciąg zbieżny (x_{n_k}). Z ciągu (y_{n_k}) wybieramy podciąg zbieżny $(y_{n_{k_\ell}})$. Ciąg $(z_{n_{k_\ell}})$ jest zbieżny. ■

Lemat 28.19
Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot z_n = 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$.

Dowód. Wykażemy, że zachodzi nierówność:

$$|(1+z)^n - 1| \leqslant (1+|z|)^n - 1$$

— korzystając z dwumianu Newtona i nierówności trójkąta:

$$|(1+z)^n - 1| = \left|1 + \tbinom{n}{1}z + \tbinom{n}{2}z^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}z^{n-1} + z^n - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \tbinom{n}{1}|z| + \tbinom{n}{2}|z|^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}|z|^{n-1} + |z|^n = (1+|z|)^n - 1\,.$$

Ponieważ założyliśmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot z_n = 0$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot |z_n| = 0$. Jeśli $n|z_n| < 1$, to $1 \leqslant (1+|z_n|)^n \leqslant e^{n|z_n|} \leqslant \frac{1}{1-n|z_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} (1+|z_n|)^n - 1 = 0$. Z nierówności $|(1+z_n)^n - 1| \leqslant$ $\leqslant (1+|z_n|)^n - 1$ wynika więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} (1+z_n)^n = 1$. ∎

Teraz czeka nas dowód istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$. Musi on się różnić od dowodu w przypadku rzeczywistym, bo o żadnej monotoniczności tym razem mówić nie możemy, bo w zbiorze $\mathbb{C}$ nie ma nierówności. Nie wskazujemy granicy, więc zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego, według którego ciąg liczbowy spełniający warunek Cauchy'ego ma granicę skończoną.

Lemat 28.20 (o zbieżności ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{z}{n})^n$)

Ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Dowód. Zauważmy najpierw, że jeśli $n > m \geqslant k \geqslant 0$, to $\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} < \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ .Wynika to natychmiast z tego, że
$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{m^k k!} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{1}{k!} <$
$< \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$. Mamy zatem

$$\left|\left(1+\tfrac{z}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{z}{m}\right)^m\right| =$$
$$= \left|1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{z}{n} + \tbinom{n}{2}\left(\tfrac{z}{n}\right)^2 + \ldots + \tbinom{n}{n-1}\left(\tfrac{z}{n}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{z}{n}\right)^n -\right.$$
$$\left. - \left(1 + \tbinom{m}{1}\tfrac{z}{m} + \tbinom{m}{2}\left(\tfrac{z}{m}\right)^2 + \ldots + \tbinom{m}{m-1}\left(\tfrac{z}{m}\right)^{m-1} + \left(\tfrac{z}{m}\right)^m\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant [1-1] + \left[\tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} - \tbinom{m}{1}\tfrac{1}{m}\right]|z| + \left[\tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} - \tbinom{m}{2}\tfrac{1}{m^2}\right]|z|^2 + \ldots +$$
$$+ \left[\tbinom{n}{m}\tfrac{1}{n^m} - \tbinom{m}{m}\tfrac{1}{m^m}\right]|z|^m + \tbinom{n}{m+1}\tfrac{1}{n^{m+1}}|z|^{m+1} + \ldots +$$
$$+ \tbinom{n}{n-1}\tfrac{1}{n^{n-1}}|z|^{n-1} + |z|^n = \left(1+\tfrac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\tfrac{|z|}{m}\right)^m.$$

Ponieważ ciąg $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$ jest zbieżny (liczba $|z|$ jest rzeczywista!), więc spełnia on warunek Cauchy'ego, wobec tego również ciąg $\left((1+\frac{z}{n})^n\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego, bo odległości między wyrazami tego ostatniego nie przekraczają odległości odpowiednich wyrazów ciągu $\left((1+\frac{|z|}{n})^n\right)$. Lemat został dowiedziony. ■

Lemat 28.21
Jeśli $|z| \leqslant \frac{1}{10}$, to $\left|e^z - 1 - z\right| \leqslant 2|z|^2$.[28.6]

Dowód. Wiemy (przykład 18.4), że $1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$, gdy $x < 1$, zatem $0 \leqslant e^x - 1 - x < \frac{x^2}{1-x}$, więc

$$\text{jeśli } x < \tfrac{1}{10}\text{, to } 0 \leqslant e^x - 1 - x < \tfrac{10}{9}x^2 .$$

Dla każdej liczby $y \in \mathbb{R}$ mamy $0 \leqslant 1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2} \leqslant \frac{y^2}{2}$. Jeśli $0 \leqslant y < \frac{\pi}{2}$, to $\sin y \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} y$, więc $y\cos y \leqslant y \leqslant \sin y$, zatem $0 \leqslant y - \sin y \leqslant y(1-\cos y) \leqslant \frac{y^3}{2}$. Jeśli więc $|y| < \frac{1}{10}$, to

$$\left|e^{iy} - 1 - iy\right| \leqslant |\cos y - 1| + |i\sin y - iy| \leqslant \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{|y|^3}{2} \leqslant \tfrac{11}{20}y^2 .$$

Zachodzą nierówności $|x| \leqslant |x+iy| = |z|$, $|y| \leqslant |x+iy| = |z|$. Załóżmy, że $|z| \leqslant \frac{1}{10}$. Mamy wtedy

$|e^z - 1 - z| = |e^x e^{iy} - 1 - (x+iy)| \leqslant$
$\leqslant |e^{iy}(e^x - 1 - x)| + |e^{iy} - 1 - iy| + |xe^{iy} - x| \leqslant$
$\leqslant \frac{10}{9}x^2 + \frac{11}{20}y^2 + |x|(|y| + \frac{11}{20}y^2) \leqslant \frac{10}{9}x^2 + \frac{11}{20}y^2 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{11}{200}y^2 \leqslant$
$\leqslant \left(\frac{10}{9} + \frac{1}{2}\right)(x^2+y^2) \leqslant 2|z|^2$. ■

Wracamy do definiowania funkcji wykładniczej. Jej pochodną w punkcie 0 ma być granica $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z - e^0}{z}$. Funkcja f ma być rozszerzeniem funkcji wykładniczej o podstawie e i wykładniku rzeczywistym. Jej pochodna w punkcie 0 powinna być równa pochodnej funkcji e^x w punkcie 0, czyli liczbie $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Twierdzenie 28.22 (charakteryzujące funkcję e^z)
Funkcja e^z jest jedyną funkcją $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ spełniającą są następujące dwa warunki

1° $f(z+w) = f(z)f(w)$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$ oraz

[28.6] Dalej x,y oznaczają liczby rzeczywiste oraz $z=x+iy$.

2° $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=1$.

Dowód. Wcześniej wykazaliśmy, że warunek 1° jest spełniony. Udowodnimy, że funkcji e^z przysługuje własność 2°. Zachodzi nierówność $\left|\frac{e^z-1-z}{z}\right|\leqslant 2|z|$, więc $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1-z}{z}=0$, a to oznacza, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-e^0}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$.

Załóżmy teraz, że funkcja f spełnia warunki 1° i 2°. Z warunku 1° wynika, że jeśli $f(z)=0$, to dla każdego $w\in\mathbb{C}$ zachodzi równość $0=f(z+w)$, więc jedyną wartością funkcji f jest liczba 0. To jest niemożliwe ze względu na warunek 2°. Wobec tego $f(z)\neq 0$ dla każdego $z\in\mathbb{C}$. Z równości $f(0)=f(0+0)=$ $=f(0)f(0)$ i nierówności $f(0)\neq 0$ wynika, że $f(0)=1$.

Niech $w_n=\frac{f\left(\frac{z}{n}\right)-1}{\frac{z}{n}}=\frac{f(\frac{z}{n})-f(0)}{\frac{z}{n}}$. Z założenia wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=1$. Zachodzi również wzór $f\left(\frac{z}{n}\right)=1+w_n\frac{z}{n}$. Z własności 1° wynika, że $f(z)=\left(f(\frac{z}{n})\right)^n=\left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n$. Z lematu 28.19 i równości $\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}=0$ wynika następny wzór $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(w_n-1)\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n=1$. Stąd wynika, że $f(z)=\left(1+w_n\frac{z}{n}\right)^n=\left(\frac{1+w_n\frac{z}{n}}{1+\frac{z}{n}}\right)^n\cdot\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, więc zachodzi równość $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$. Udowodniliśmy jednoznaczność funkcji f. ■

Wniosek 28.23
Dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi równość

$$e^x(\cos y+i\sin y)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos y+i\sin y}{n}\right)^n.\ ■$$

Z tego, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$ wynika, że $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^{w+z}-e^w}{z}=e^w$ dla każdej liczby zespolonej w. Zwykle tę ostatnią równość z oczywistych przyczyn zapisujemy jako $(e^w)'=e^w$.

Rozszerzając więc dziedzinę funkcji wykładniczej otrzymaliśmy funkcję, która z formalnego punktu widzenia ma własności podobne do funkcji wykładniczej w dziedzinie rzeczywistej. Są jednak istotne różnice. Nie możemy wgłębiać się w nie z braku miejsca, ale na jedną rzecz zwrócimy uwagę. Funkcja wykładnicza o podstawie e i wykładniku *rzeczywistym* jest ściśle rosnąca: jeśli $x_1 < x_2$, to $e^{x_1} < e^{x_2}$. Z funkcją wykładniczą e^z jest inaczej. Mamy $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$, zatem dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$. Funkcja wykładnicza w dziedzinie zespolonej jest więc okresowa, jej okresem jest $2\pi i$ — liczba czysto urojona.

Jej wartościami są wszystkie liczby zespolone (w tym rzeczywiste) z jednym wyjątkiem: $0 \neq e^z$ dla $z \in \mathbb{C}$. Wynika to natychmiast z tego, że każdą liczbę dodatnią $r = |w|$ można zapisać w postaci e^x, $x \in \mathbb{R}$. Wystarczy przyjąć $x = \ln r$ (jest to jedyny wybór). Następnie przyjmujemy $y = \mathrm{Arg}\, w$ i otrzymujemy równość $w = e^z$, gdzie $z = x + iy = \ln|w| + i\mathrm{Arg}\, w$.

Piszemy wtedy $z = \ln w$. Trzeba jednak pamiętać o tym, że w dziedzinie zespolonej symbol $\ln w$ może oznaczać dowolną z nieskończenie wielu liczb z, dla których zachodzi równość $w = e^z$. Można więc napisać $\ln(-1) = \pi i$ albo $\ln(-1) = -5\pi i$ itp.

Wykażemy ważne twierdzenie sformułowane już w 1608 r., które próbowało dowieść wielu ludzi (d'Alembert, Euler, Gauss, Lagrange, Laplace i wielu innych). Dziś chyba przeważa pogląd, że pierwszy poprawny dowód został napisamy przez J–R Arganda w 1806 r. i poprawiony siedem lat później. W dowodach wielu czołowych matematyków znajdowano różne luki.

Twierdzenie 28.24 (Zasadnicze twierdzenie algebry) Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych, stopnia większego (ostro) od 0, ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Dowód. Niech $w(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, przy czym $n \geqslant 1$ i $a_n \neq 0$. Istnieje taka liczba $r > 0$, że jeśli $|z| \geqslant r$, to $|w(z)| > |a_0| = |w(0)|$, np. $r = 2 + \frac{2|a_0|+|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$. Jeśli bowiem $|z| \geqslant r$, to $|z| \geqslant 2 > 1$ i wobec tego

$$|w(z)| = |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n z^n| - |a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n||z|^n - \big(|a_0| + |a_1||z| + \ldots + |a_{n-1}||z|^{n-1}|\big) \geqslant$$
$$\geqslant |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}||\big) =$$

$$= |z|^{n-1}\Big(|a_n||z| - \big(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|\Big) >$$

$$> \big((2|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|) - (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)\big) = |a_0|\,.$$

Z twierdzenia Bolzano–Weierstrassa wynika, że z ciągu liczb zespolonych (z_n) o modułach nieprzekraczających r można wybrać podciąg zbieżny do pewnej granicy g i wtedy oczywiście $|g| \leqslant r|$. Jeśli $m = \inf\{|w(z)\colon \ \ |z| \leqslant r\}$, to istnieje taki ciąg (z_n), że $\lim\limits_{n\to\infty} |w(z_n)| = m$. Niech $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$. Oczywiście $|z_0| \leqslant r$ oraz $|w(z_0)| = \lim\limits_{k\to\infty}|w(z_{n_k})| = m$. Jeśli $|z| \leqslant r$, to $|w(z_0)| \leqslant |w(z)|$, czyli $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ w kole o promieniu r i środku w punkcie 0. W szczególności $|w(z_0)| \leqslant |w(0)| = |a_0|$ i wobec tego również dla $|z| \geqslant r$ zachodzi nierówność $|w(z)| \geqslant |a_0| \geqslant |w(z_0)|$. Oznacza to, że $|w(z_0)|$ jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$ w *całej* płaszczyźnie.

Wykażemy, że $w(z_0) = 0$. Przyjmijmy, że $z = z_0 + h$. Wtedy piszemy $w(z) = w(z_0+h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \ldots + b_nh^n$, gdzie $b_0 = = a_0 + a_1z_0 + \ldots + a_nz_0^n = w\,(z_0)$, $b_1 = a_1 + 2a_2z_0 + \ldots + na_nz_0^{n-1} = = w'\,(z_0)$, $\ldots$, $b_n = a_n = \frac{1}{n!}w^{(n)}(z_0)$. Ponieważ stopień wielomianu równy jest n, więc $0 \neq a_n = b_n$. Niech $m \geqslant 1$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $b_m \neq 0$. Załóżmy, że $w(z_0) \neq 0$.

Wtedy można napisać $w(z_0) = b_0 = |b_0| \cdot e^{i\varphi}$ dla pewnego $\varphi \in \mathbb{R}$. Mamy dalej $|w(z)| = |b_0 + b_mh^m + b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n|$. Niech $\varrho < 1$ będzie liczbą dodatnią mniejszą niż $\frac{1}{2}|b_0|$ i niech $h = \varrho \cdot e^{i\frac{\varphi+\pi}{m}}$. Wtedy $\big|b_0 + b_mh^m\big| = \big||b_0| \cdot e^{i\varphi} + \varrho^m e^{i(\varphi+\pi)}\big| = \big||b_0|e^{i\varphi} - \varrho^m e^{i\varphi}\big| = \big||b_0| - \varrho^m\big|\big|e^{i\varphi}\big| = |b_0| - \varrho^m$. Załóżmy dodatkowo, że $\varrho\big(|b_{m+1}| + |b_{m+2}| + \ldots + |b_n|\big) < \frac{1}{2}$ (wybieramy małe $\varrho > 0$). Wtedy

$$|w(z)| = \big|b_0 + b_mh^m + b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| \leqslant$$
$$\leqslant \big|b_0 + b_mh^m\big| + \big|b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| =$$
$$= |b_0| - \varrho^m + \big|b_{m+1}h^{m+1} + \ldots + b_nh^n\big| \leqslant$$
$$\leqslant |b_0| - \varrho^m + \big(|b_{m+1}||h|^{m+1} + \ldots + |b_n||h|^n\big) \leqslant$$
$$\leqslant |b_0| - \varrho^m + |h|^{m+1}\big(|b_{m+1}| + \ldots + |b_n|\big) =$$
$$= |b_0| - \varrho^m + \varrho^{m+1}\big(|b_{m+1}| + \ldots + |b_n|\big) \leqslant$$

$\leqslant |b_0| - \varrho^m + \frac{1}{2}\varrho^m = |b_0| - \frac{1}{2}\varrho^m < |b_0|$.
Okazało się, że wbrew założeniu $|w(z_0)| = |b_0|$ *nie* jest najmniejszą wartością funkcji $|w|$. To kończy dowód tego, że $w(z_0) = 0$. Twierdzenie zostało więc wykazane. ■

Wniosek z zasadniczego twierdzenia algebry
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych, którego stopień jest dodatni, może być przedstawiony w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego i drugiego.

Dowód. Jeśli współczynniki wielomianu w są rzeczywiste, to $\overline{w(z)} = w(\overline{z})$ — prosty dowód tej równości pozostawiamy Czytelnikowi. Z tej równości wynika, że jeśli liczba zespolona z_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba zespolona $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu. Wobec tego jeśli $z_0 \notin \mathbb{R}$, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + |z_0|^2$. Współczynniki tego wielomianu są rzeczywiste, więc w ten sposób sprowadzamy problem do wielomianu stopnia o 2 mniejszego od w.

Jeśli z_0 jest liczbą rzeczywistą, to wielomian w jest podzielny przez wielomian $z - z_0$, więc w tym przypadku redukujemy problem do wielomianu stopnia o 1 mniejszego od w.

Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Niech w będzie wielomianem *najmniejszego* stopnia, dla którego teza nie zachodzi. Po podzieleniu go przez wielomian stopnia 1 lub 2 otrzymujemy wielomian stopnia mniejszego, więc iloczyn wielomianów stopnia pierwszego i drugiego o współczynnikach rzeczywistych, co oznacza, że wielomian w też jest iloczynem takiego typu, wbrew naszemu założeniu. Dowód został zakończony. ■

Zadania

1. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

a. $z^2 + 4z + 5 = 0$; **b.** $z + \frac{1}{z} = 0$;
c. $z^2 - \bar{z}^2 = 0$; **d.** $z^2 = z$;
e. $z^{2004} = z$; **f.** $e^z = 1$;
g. $e^z = -1$; **h.** $z^2 - (5 + 5i)z + 13i = 0$;
i. $e^z = i$; **j.** $z^2 + (2 + 3i)z - 5 + 5i = 0$;
k. $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$; **l.** $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9 = 0$;
ł. $|z + i| + |z - i| = 2$; **m.** $|z + i| + |z - i| = \sqrt{5}$;

o. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **p.** $\overline{z} = z^3$;
q. $z^8 - 15z^4 - 16 = 0$; **r.** $\overline{z} = -z^2$;
s. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$; **t.** $\overline{z} = z^3$;
u. $z^6 + 2^6 = 0$; **v.** $z^6 - 2^6 = 0$;
w. $z\overline{z} + z - \overline{z} = 3 + 2i$ **x.** $z^4 + z^3 - z^2 + z + 1 = 0$.

2. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y, dla których
a. $(5-8i)x + (7+3i)y = 2 - i$;
b. $(7+2i)x - (5-4i)y = -1 - i$

3. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone
a. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b.** $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, **c.** $1 - i\sqrt{3}$

4. Obliczyć $\sqrt{3-4i}$, $\sqrt{-3-4i}$, $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

5. Obliczyć iloraz liczb $(1+i)^n$ i $(1-i)^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

6. Z wzoru na sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego wyprowadzić wzór na sumę: $\sin\varphi + \sin(2\varphi) + \ldots + \sin n\varphi$ oraz na sumę $\cos\varphi + \cos(2\varphi) + \ldots + \cos(n\varphi)$.

7. Obliczyć sumę $\cos^2\varphi + \cos^2(2\varphi) + \ldots + \cos^2(n\varphi)$.

8. Obliczyć sumę $\binom{n}{1}\cos\varphi + \binom{n}{2}\cos(2\varphi) + \ldots + \binom{n}{n}\cos(n\varphi)$.

9. Dowieść, że $\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$.

10. Obliczyć sumę $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \ldots$.

11. Obliczyć sumę $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \ldots$.

12. Znaleźć sumę pięćdziesiątych potęg długości wszystkich boków i przekątnych stukąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1.

13. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 jest równa n^2.

14. Udowodnić, że suma kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

15. Udowodnić, że iloczyn kwadratów długości wszystkich boków i przekątnych n–kąta foremnego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest równa $\sqrt{n^n}$.

16. $\bar{z}$ to punkt symetryczny do punktu z względem osi rzeczywistej. Znaleźć punkty symetryczne do punktu z względem

a. osi urojonej, **b.** prostej o równaniu $y = x$,

c. prostej: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, **d.** prostej: $y = \sqrt{3}x$.

17. a. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z}\cdot z\cdot|z|+|z^3+1| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.
b. Znaleźć zbiór X złożony z tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość $\bar{z}\cdot z\cdot|z|+|z^3-i| = 1$. Narysować X na płaszczyźnie.

18. Niech L oznacza zbiór złożony ze wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi równość

(a) $iz = \overline{z}$ (b) $-iz = \overline{z}$.

Naszkicować zbiór L na płaszczyźnie. Opisać za pomocą równania zbiór M powstały w wyniku obrócenia L o 45° zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $\mathbf{0} = (0,0)$.

19. Wykazać, że jeśli $ad \neq bc$, to funkcja postaci $\frac{az+b}{cz+d}$ przekształca zbiór $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ na zbiór $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{a}{c}\}$, jest różnowartościowa, $\lim\limits_{z\to -d/c}\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = \frac{a}{c}$.

Definicja 28.25 (homografii)
Jeśli $ad \neq bc$ i $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dla $z \neq -\frac{d}{c}$ oraz $h\big(-\frac{d}{c}\big) = \infty$ i $h(\infty) = \frac{a}{c}$, to funkcję $h\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ nazywamy homografią.[28.7] ■

20. Udowodnić, że jeśli h jest homografią, L — prostą, to zbiór $h\big(L\cup\{\infty\}\big)$ jest okręgiem lub prostą uzupełnioną jednym punktem ∞. Jak wyglądają obrazy okręgów?

21. Udowodnić, że homografia h przekształca górną półpłaszczyznę: $\{z\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}\cup\{\infty\}$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby rzeczywiste a,b,c,d, że $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ i $ad-bc > 0$.

22. Dowieść, że homografia h przekształca koło $\{z\colon\ |z|<1\}$ na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby $\varphi\in\mathbb{R}$ i $z_0\in\mathbb{C}$, że $|z_0|<1$ oraz $h(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$.

[28.7] ∞ to sztucznie dodany punkt, nie wprowadzamy punktu $-\infty$, bo nie ma nierówności.