SZEREGI POTĘGOWE

Przypomnijmy, że szeregiem potęgowym o środku w punkcie p nazywamy szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$. Udowodniliśmy wcześniej, że dla każdego ciągu (a_n) istnieje takie $r \in [0,\infty]$, że jeśli $|x-p| < r$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, a jeśli $|x-p| > r$, to ten szereg jest rozbieżny. Takie r nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego. W wielu podręcznikach podawany jest wzór na r. Podamy go też, choć nie jest on nam potrzebny do sformułowania żadnego twierdzenia.

Definicja 26.1 (granicy górnej)
$M \in [-\infty,+\infty]$ jest granicą górną ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy gdy spełnione są oba warunki

(i) dla każdego rosnącego ciągu (k_n), dla którego istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n}$ zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \leqslant M$ oraz

(ii) M jest najmniejszym elementem zbioru $[-\infty,+\infty]$, dla którego spełniony jest warunek (i). ■

Analogicznie definiowana jest granica dolna ciągu. Granicę górną ciągu (a_n) oznaczamy symbolem $\limsup a_n$, a granicę dolną — symbolem $\liminf a_n$. Granica górna ciągu to kres górny granic wszystkich jego podciągów zbieżnych.

Z definicji wynika od razu, że jeśli ciąg ma granicę, to jest ona też jego granicą górną i dolną.

Lemat 26.2
Istnieje podciąg, którego granica jest równa granicy górnej ciągu.
Dowód. Niech $M = \limsup a_n$. Jeśli $M = -\infty$, to $-\infty$ jest granicą wszystkich tych podciągów ciągu (a_n), które mają granice. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, więc w tym przypadku twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że $M > -\infty$. Niech (M_j) będzie ściśle rosnącym ciągiem o granicy M. Ponieważ $M_1 < M$, więc istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), którego granica jest większa niż M_1, zatem istnieje takie m_1, że $a_{m_1} > M_1$. Ponieważ $M_2 < M$, więc istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), którego granica jest większa niż M_2, zatem istnieje takie $m_2 > m_1$, że $a_{m_2} > M_2$.

Analogicznie istnieje taka liczba $m_3 > m_2$, że $a_{m_3} > M_3$, itd. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, więc z ciągu (a_{m_n}) nie można wybrać podciągu, który ma granicę mniejszą niż $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = M$, a większa niż $M = \limsup a_n$ ta granica też być nie może. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = M$, co kończy dowód lematu. ■

Lemat 26.3
Jeśli $q > \limsup a_n$, to istnieje taka liczba naturalna n_q, że jeśli $n > n_q$, to $a_n < q$.

Dowód. Załóżmy, ze tak nie jest. Wtedy istnieje taki podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), że $a_{k_n} \geqslant q$ dla każdego n. To jednak nie jest możliwe, bo wybierając z niego podciąg, który ma granicę, otrzymujemy podciąg ciągu (a_n), którego granica nie jest mniejsza niż $q > \limsup a_n$, wbrew definicji granicy górnej. ■

Z tego lematu wynika, że kryterium pierwiastkowe zbieżności szeregu można wypowiedzieć tak:

Twierdzenie 26.4 (Cauchy'ego)
Jeśli $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny, co więcej jego wyraz nie dąży do 0.

Dowód. Zbieżność wynika natychmiast z lematu poprzedzającego twierdzenie, wystarczy przyjąć np. $q = \frac{1}{2}(1 + \limsup |a_n|)$. W tej sytuacji dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, więc $|a_n| < q^n$, więc twierdzenie wynika z kryterium porównawczego. Rozbieżność jest konsekwencją tego, że dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, więc również $|a_n| > 1$, zatem wyraz szeregu nie dąży do 0. ■

Twierdzenie 26.5 (Cauchy'ego – Hadamarda)
Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb. rzeczywistych. Niech $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$. Wtedy $r \in [0, \infty]$ jest promieniem zbieżności szeregu $\sum a_n(x-p)^n$ dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że jeśli $x \in (p-r, p+r)$, to szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest zbieżny, a jeśli $x \notin [p-r, p+r]$, to — rozbieżny.

Dowód. Jeśli $|x-p| < r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, to zachodzi nierówność $\limsup \sqrt[n]{|a_n||x-p|^n} < 1$, więc szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest bezwzględnie zbieżny, na mocy kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego. Jeśli $|x-p| > r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, to zachodzi nierówność $\limsup \sqrt[n]{|a_n||x-p|^n} > 1$, więc szereg $\sum a_n(x-p)^n$ jest rozbieżny, na mocy kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego. ■

Twierdzenie 26.6 (**o jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego**)
Szereg potęgowy jest zbieżny jednostajnie na każdym domkniętym przedziale ograniczonym, zawartym w przedziale zbieżności.
Dowód. Wystarczy zajmować się szeregami potęgowymi o środku w punkcie 0. Udowodniliśmy już w rozdziale *Ciągi i szeregi funkcyjne I*, że szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale postaci $[-a,a]$, jeśli $0 \leqslant a < r$.

Załóżmy teraz, że $0 < r < \infty$ i że szereg $\sum a_n \varrho^n$ jest zbieżny, gdzie $\varrho = r$ lub $\varrho = -r$. Niech $\alpha_n = a_n \varrho^n$ i $t = \frac{x}{\varrho}$, zatem $a_n x^n = \alpha_n t^n$. Twierdzenie zostanie udowodnione, jeśli wykażemy, że jednostajna zbieżność szeregu $\sum \alpha_n t^n$ na przedziale $[0,1]$ wynika ze zbieżności szeregu $\sum \alpha_n$, bo *iksom* z przedziału domkniętego o końcach 0 i ϱ odpowiadają *te* z przedziału $[0,1]$.

Przyjmijmy $s_{n,k} = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+k}$. Mamy wtedy
$\alpha_{n+1}t^{n+1} + \alpha_{n+2}t^{n+2} + \dots + \alpha_{n+k}t^{n+k} =$
$= s_{n,1}t^{n+1} + (s_{n,2} - s_{n,1})t^{n+2} + \dots + (s_{n,k} - s_{n,k-1})t^{n+k} =$
$= (1-t)\big(s_{n,1}t^{n+1} + s_{n,2}t^{n+2} + \dots + s_{n,k-1}t^{n+k-1}\big) + s_{n,k}t^{n+k}$.
Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Szereg $\sum \alpha_n$ jest zbieżny, więc spełnia warunek Cauchy'ego, więc dla dostatecznie dużych n i dowolnych k zachodzą nierówności $|s_{n+1}| < \varepsilon$, $|s_{n+2}| < \varepsilon$, $\dots$, $|s_{n+k}| < \varepsilon$. Stąd, z tego, że $0 \leqslant t \leqslant 1$ i z poprzednich równości wynika, że $\left|s_{n,k}t^{n+k}\right| < \varepsilon$ oraz
$\left|(1-t)\big(s_{n,1}t^{n+1} + s_{n,2}t^{n+2} + \dots + s_{n,k-1}t^{n+k-1}\big)\right| \leqslant$
$\leqslant \varepsilon(1-t)\big(t^{n+1} + t^{n+2} + \dots + t^{n+k-1}\big) = \varepsilon(t^{n+1} - t^{n+k}) < \varepsilon$,
więc $\left|a_{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}t^{n+2} + \dots + a_{n+k}t^{n+k}\right| < 2\varepsilon$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ na przedziale $[0,1]$. ■

Przypomnijmy, że suma szeregu potęgowego $\sum a_n(x-p)^n$ jest różniczkowalna w punktach wewnętrznych przedziału zbieżności i $\left(\sum a_n(x-p)^n\right)' = \sum na_n(x-p)^{n-1}$, więc pochodna też jest sumą szeregu potęgowego, który ma taki sam promień zbieżności, jak szereg wyjściowy. Stąd —łatwa indukcja — wynika

Twierdzenie 26.7
Suma szeregu potęgowego jest wewnątrz swego przedziału zbieżności różniczkowalna nieskończenie wiele razy.
Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$, to $f^{(k)}(p) = k!a_k$. ■

Z tego twierdzenia wynika, że jeśli równość $\sum a_n(x-p)^n = \sum b_n(x-p)^n$ zachodzi dla wszystkich liczb z pewnego przedziału o środku w punkcie p, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ To twierdzenie można wzmocnić osłabiając jego założenia.

Twierdzenie 26.8 (zasada identyczności)
Jeśli istnieje ciąg (x_j) zbieżny do punktu p przy czym $x_j \neq p$ dla dowolnego j i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_j-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_j-p)^n$ dla $j = 1, 2, \ldots$, to $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...

Dowód. Zdefiniujmy funkcje dwie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ oraz $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-p)^n$. Są one nieskończenie wiele razy różniczkowalne na pewnym przedziale o środku p. Ponieważ $f(x_j) = g(x_j)$ i $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = p$ więc,

$$a_0 = f(p) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = \lim_{j\to\infty} g(x_j) = g(p) = b_0 .$$

Wobec tego dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots\}$ zachodzi wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1} = \frac{f(x_j)-f(p)}{x_j-p} = \frac{g(x_j)-g(p)}{x_j-p} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1} .$$

Funkcje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_j-p)^{n-1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_j-p)^{n-1}$ spełniają założenia dowodzonego twierdzenia, zatem z już udowodnionej części twierdzenia wynika, że $a_1 = b_1$, co pozwala kontynuować indukcyjny dowód wzoru $a_n = b_n$. ■

Definicja 26.9 (funkcji analitycznej)
Funkcja f jest analityczna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczba $r > 0$ i ciąg (a_n) takie, że jeśli $|x-p| < r$, to

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$. Funkcję analityczną w każdym punkcie pewnego zbioru A nazywamy analityczną w zbiorze A. ■

Z ostatnio wykazanych twierdzeń wynika, że jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w pewnym przedziale o środku w punkcie p. Wiele z dotychczas poznanych funkcji to funkcje analityczne, np. wielomiany, funkcja wykładnicza e^x, logarytm naturalny, sinus, kosinus, funkcja potęgowa x^a. Analityczność sprawdzaliśmy czasem w punkcie 0, czasem w punkcie 1, ale łatwo można było wykazać analityczność w innych punktach. W rozdziale poświęconym regule de l'Hospitala i wzorowi Taylora pojawiły się również funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne, które nie są analityczne przynajmniej w pewnych punktach.

W przypadku funkcji analitycznych twierdzenia o lokalnych ekstremach i punktach przegięcia umożliwiają wyjaśnienie charakteru punktu, w którym pierwsza pochodna zeruje się. Wynika to stąd, że jeśli funkcja analityczna w punkcie p nie jest stała w pewnym otoczeniu tego punktu, to któraś pochodna w tym punkcie jest różna od zera.

Wiele twierdzeń w przypadku funkcji analitycznych ma prostszą postać niż ich odpowiedniki dla funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Teraz udowodnimy kilka twierdzeń, które pozwolą łatwo przekonywać się o analityczności różnych funkcji. Warto w tym miejscu dodać, że długo sądzono, że wszystkie funkcje nieskończenie wiele razy różniczkowalne są analityczne!

Twierdzenie 26.10 (o analityczności w otoczeniu)
Jeżeli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to jest analityczna w pewnym przedziale otwartym o środku w punkcie p.

Dowód poprzedzimy twierdzeniem o niezależności sumy szeregu bezwzględnie zbieżnego od kolejności jego wyrazów.

Lemat 26.11 (o dużej zmianie kolejności sumowania)
Jeśli zachodzi jedno z dwóch założeń:

(i) dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 0$ szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ jest zbieżny i $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < +\infty$,

(ii) dla pewnego różnowartościowego przekształcenia

$\tilde{\sigma}\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| < \infty$,

to dla każdego różnowartościowego $\sigma\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}\,.$$

Dowód. Zaczniemy od równoważności warunków (i) oraz (ii).

Załóżmy, że spełniony jest warunek (i). Dla dowolnego różnowartościowego $\sigma\colon \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ szereg $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\sigma(j)}|$ jest zbieżny, bo

$$\sum_{j=0}^{\ell} |a_{\sigma(j)}| \leqslant \sum_{m=0}^{p}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Big) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Big)$$

dla każdej liczby naturalnej p większej lub równej największemu z pierwszych elementów par $\sigma(0)$, $\sigma(1)$, ..., $\sigma(\ell)$).

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (ii). Dla dowolnych liczb naturalnych p, q i dla każdej liczby naturalnej k spełniona jest nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{n=0}^{p} |a_{m,n}|\Big) \leqslant \sum_{j=0}^{\ell} |a_{\tilde{\sigma}(j)}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,,$$

gdzie ℓ jest tak dużą liczbą, że wśród par $\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}(1), \ldots, \tilde{\sigma}(\ell)$ znajdują się wszystkie pary

$$(0,0)\,,\ (0,1)\,,\ \ldots,\ (0,p)\,,\ (1,0)\,,\ \ldots,\ (1,p)\,,\ (q,0)\,,\ \ldots,\ (q,p)\,.$$

Ustalając q i przechodząc do granicy przy $p \longrightarrow \infty$ otrzymujemy nierówność

$$\sum_{m=0}^{q}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|\Big) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Z definicji sumy szeregu wynika, że

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,.$$

Wykazaliśmy, że z założenia (ii) wynika założenie (i).

W istocie rzeczy z dowodu równoważności warunków (i) i (ii) wynika równość:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{\tilde{\sigma}(j)}|\,,$$

przy czym jest ona prawdziwa zawsze, również wtedy, gdy sumy nie są skończone.

Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego m istnieje taka liczba $k(m) \in \mathbb{N}$, że $\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}}$. Wtedy

$$\Big|\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big| \leqslant \sum_{n=k(m)+1}^{\infty} |a_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{2^{m+3}},$$

zatem

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{32} + \cdots = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Niech $r(\varepsilon)$ i $\mu(\varepsilon)$ będą takimi liczbami naturalnymi, że

$$\sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{i} \qquad \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Niech $\rho(\varepsilon)$ oznacza taką liczbę naturalną, że

$$\Big\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma\big(r(\varepsilon)\big)\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \Big\{(0,0), (0,1), \ldots, \big(0, k(0)\big)\Big\} \cup \Big\{(1,0), \ldots, \big(1, k(1)\big)\Big\} \cup$$
$$\cup \ldots \cup \Big\{\big(\mu(\varepsilon), 0\big), \ldots, \big(\mu(\varepsilon), k[\mu(\varepsilon)]\big)\Big\} \subseteq$$
$$\subseteq \Big\{\sigma(0),\ \sigma(1),\ \sigma(2),\ \ldots,\ \sigma\big[\rho(\varepsilon)\big]\Big\}.$$

Wtedy zachodzą nierówności

$$\Big|\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=0}^{k(m)} a_{m,n}\Big) - \sum_{j=0}^{\rho(\varepsilon)} a_{\sigma(j)}\Big| +$$
$$+ \Big|\sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty} a_{m,n}\Big)\Big| + \Big|\sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty} a_{\sigma(j)}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=\mu(\varepsilon)+1}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=r(\varepsilon)+1}^{\rho(\varepsilon)} |a_{\sigma(j)}| +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\mu(\varepsilon)}\Big(\sum_{n=k(m)+1}^{\infty}|a_{m,n}|\Big) + \sum_{j=\rho(\varepsilon)+1}^{\infty}|a_{\sigma(j)}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}\Big)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{\sigma(j)}\,. \ \blacksquare$$

Dowód twierdzenia o analityczności w otoczeniu. Niech $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n$, r niech będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego i niech q będzie taką liczbą, że $|q-p|<r$. Jeśli $|x-q|<r-|q-p|$, czyli $|x-q|+|q-p|<r$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_n|\tbinom{n}{k}|x-q|^k|q-p|^{n-k}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\big(|x-q|+|q-p|\big)^n<\infty.$$

Korzystając z lematu o dużej zmianie kolejności sumowania możemy napisać:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-p)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{n}{k}(x-q)^k(q-p)^{n-k}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{k}(x-q)^k(q-p)^{n-k}\Big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\tbinom{n}{k}(q-p)^{n-k}\Big)(x-q)^k\,,$$

a to oznacza, że funkcja f jest analityczna w punkcie q. Dowód został zakończony. $\blacksquare$

Uwaga 26.12

Z dowodu twierdzenia o analityczności w otoczeniu wynika, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f w punkcie q jest równy co najmniej $r-|q-p|$. Może być większy, o czym przekonamy się niebawem. Niech $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Zachodzi równość

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n\,,$$

więc w tym przypadku promień zbieżności szeregu Taylora w punkcie 0 jest równy 1. Rozwiniemy funkcję f wokół punktu $\frac{1}{2}$. Mamy też

$$f(x)=\frac{1}{3/2+(x-1/2)}=\frac{2}{3}\frac{1}{1+(2/3)(x-1/2)}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\big(-\tfrac{2}{3}\big)^n\big(x-\tfrac{1}{2}\big)^n\,,$$

więc teraz promień zbieżności jest równy $\frac{3}{2}>\frac{1}{2}=1-\left|\frac{1}{2}-0\right|$. W podobny sposób wykazujemy, że promień zbieżności szeregu Taylora funkcji f w punkcie $-\frac{1}{2}$ jest równy $\frac{1}{2}=1-\left|-\frac{1}{2}-0\right|$. $\blacksquare$

Wniosek 26.13
Z twierdzenia o analityczności w otoczeniu wynika, że funkcja wykładnicza, funkcje sinus i kosinus, wielomiany są analityczne w każdym punkcie. Z dowodu twierdzenia wynika natomiast, że promienie zbieżności ich szeregów Taylora w każdym punkcie są równe $+\infty$. ■

Przykład 26.1 Udowodniliśmy wcześniej, że dla $x \in (-1,1]$ zachodzi równość $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Wynika stąd analityczność funkcji $\ln$ w każdym punkcie przedziału otwartego $(-1,1)$. w rzeczywistości jest ona analityczna w każdym punkcie półprostej $(0,\infty)$. Jeśli $p>0$, to $\ln(p+h) = \ln p + \ln\big(1+\frac{h}{p}\big) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}\big(\frac{h}{p}\big)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}\big(\frac{-1}{p}\big)^{n+1}x^{n+1}$. Oczywiście promień zbieżności otrzymanego szeregu jest równy $|p|$. ■

Uwaga 26.14
Rozwinięcie logarytmu naturalnego wokół punktu 1 można uzyskać znacznie prościej niż poprzednio: wystarczy stwierdzić, że promień zbieżności szeregu jest równy 1, np. stosując kryterium ilorazowe, a następnie stwierdzić, że zachodzi następująca równość $\big(\ln(1+x)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}\big)' = 0$, z której wynika, że funkcja $\ln(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ jest stała na przedziale $(-1,1)$, a potem obliczyć jej wartość w punkcie 0. ■

Przykład 26.2 Udowodniliśmy już wcześniej, że dla dowolnej liczby $x \in (-1,1)$ zachodzi wzór $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, więc wykazaliśmy analityczność funkcji x^a w punkcie 1. Stąd wynika łatwo, że jest ona analityczna w każdym punkcie $p>0$. Mamy $(p+h)^a = p^a\big(1+\frac{h}{p}\big)^a = p^a\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}\big(\frac{h}{p}\big)^n$ dla dowolnej liczby h, której wartość bezwzględna jest mniejsza niż p. ■

Uwaga 26.15
Rozwinięcie $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ można uzyskać prościej niż poprzednio. Bez trudu stwierdzamy, że dla każdego $a \in \mathbb{R}$, które nie jest liczbą całkowitą nieujemną, promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ jest równy 1, a gdy a jest liczbą całkowitą nieujemną promieniem zbieżności jest $+\infty$. Jeśli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$, to

$$(1+x)f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a}{n}x^{n} = a + a\sum_{n=2}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^{n-1} +$$

$$+a\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{a-1}{n-1}x^{n} = a + a\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n}x^{n} + a\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a-1}{n-1}x^{n} =$$

$$= a + a\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^{n} = af(x)$$ — skorzystaliśmy z tego, że $n\binom{a}{n} = a\binom{a-1}{n-1}$ i $\binom{a-1}{n} + \binom{a-1}{n-1} = \binom{a}{n}$. Teraz mamy

$$\big(f(x)(1+x)^{-a}\big)' = f'(x)(1+x)^{-a} - af(x)(1+x)^{-a-1} =$$
$$= (1+x)^{-a-1}\big((1+x)f'(x) - af(x)\big) = 0\,,$$

więc dla każdego $x \in (-1,1)$ zachodzi równość $f(x)(1+x)^{-a} = f(0)(1+0)^{-a} = 1$, czyli $f(x) = (1+x)^{a}$. ■

Z tego, co napisaliśmy wyżej wynika, że w często warto przyjrzeć się szeregowi Taylora, który można znaleźć np. obliczając pochodne funkcji w interesującym nas punkcie, następnie wykazać jakoś zbieżność szeregu, a potem wykazać równość funkcji i sumy szeregu. Celowo unikamy postaci reszty we wzorze Taylora, bo w pewnych przypadkach to skuteczna metoda, ale w innych wymaga sporo wysiłku, np. $\ln(1+x)$, $(1+x)^{a}$. Można przekonać się o tym oglądając starsze podręczniki, w których stosowano wzory na postać reszty zgodnie z panującą wówczas modą.

Wykażemy teraz jeszcze kilka własności funkcji analitycznych, które ułatwiają zajmowanie się nimi.

Twierdzenie 26.16
Jeśli funkcje f i g są analityczne w punkcie p, to również funkcje $f+g$, $f-g$ i $f\cdot g$ są analityczne w tym punkcie p.

Dowód. Jeśli $f(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$, $g(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^n$, to $(f+g)(p+h) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)h^n$, co dowodzi analityczności sumy funkcji analitycznych. W taki sam sposób dowodzimy analityczności różnicy funkcji analitycznych. Analityczność iloczynu funkcji analitycznych wynika z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów bezwzględnie zbieżnych (szeregi potęgowe wewnątrz swych przedziałów zbieżności są bezwzględnie zbieżne). ■

Twierdzenie 26.17 (o analityczności złożenia)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, a funkcja g jest analityczna w punkcie $f(p)$, to ich złożenie $g \circ f$ jest analityczne w punkcie p.

Dowód. Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-p)^n$, jeśli $|x-p| < r$ i $r > 0$ oraz $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \big[y - f(p)\big]^n$, jeśli $|y - f(p)| < \rho$, $\rho > 0$. Ponieważ funkcja zdefiniowana szeregiem potęgowym jest ciągła i szereg potęgowy jest wewnątrz swego przedziału zbieżności jest zbieżny bezwzględnie, więc istnieje taka liczba dodatnia $r_0 < r$, że jeśli $|x - p| < r_0$, to $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n < \rho$. Wynika stąd, że $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n \big)^j < \infty$, dzięki czemu możemy zmieniać kolejność sumowania dowolnie. Z twierdzenia o mnożeniu szeregów wynika można szereg potęgowy podnieść do dowolnej naturalnej potęgi. W wyniku otrzymujemy szereg potęgowy. Niech $\big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (x-p)^n \big)^j = \sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n} (x-p)^n$. Z nierówności trójkąta wnioskujemy, że prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{n=j}^{\infty} |a_{j,n}| \cdot |x - p|^n \leqslant \big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - p|^n \big)^j .$$

Wynika stąd, że szeregu podwójnym $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n} (x - p)^n \right)$ można zmieniać kolejność wyrazów dowolnie nie wpływając na jego zbieżność ani sumę. Mamy więc

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} a_{j,n} (x - p)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \Big(b_j \, a_{j,n} \Big) (x - p)^n .$$

Dowód został zakończony. ■

Wniosek 26.18
Iloraz funkcji analitycznej przez funkcję analityczną różną od 0 jest funkcją analityczną

Dowód. Jeśli g jest funkcją analityczną i $g(p) \neq 0$, to funkcja $\frac{1}{g(x)}$ jest analityczna w punkcie p, bo jest złożeniem funkcji analitycznej g z funkcją $\frac{1}{y}$ analityczną w punkcie $g(p)$. Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p, to iloraz $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ jest analityczny w punkcie p jako iloczyn funkcji analitycznych. ■

Wniosek 26.19
Każda funkcja wymierna jest analityczna. ■

Twierdzenie 26.20 (o analityczności funkcji odwrotnej)
Jeśli funkcja f jest analityczna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$, to po ograniczeniu jej dziedziny do dostatecznie małego otoczenia punktu p otrzymujemy funkcję różnowartościową, której funkcja odwrotna jest analityczna.

Dowód. Niech $T(y) = y - f(p)$ i $S(x) = x + p$. Funkcje T i S są analityczne i odwrotne do nich też, więc możemy zająć się istnieniem funkcji odwrotnej do funkcji $g := T \circ f \circ S$. Jeśli zdołamy wykazać, że to złożenie ma funkcję odwrotną, to będziemy mogli napisać, że prawdziwy jest wzór $f^{-1} = S \circ (T \circ f \circ S)^{-1} \circ T$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia funkcja f^{-1} okaże się być funkcją analityczną. Oczywiście $g(0) = T \circ f \circ S(0) = 0$. Niech $g(x) = T \circ f \circ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Wtedy $a_1 = g'(0) = f'(p) \neq 0$. Chcemy udowodnić, że funkcja g^{-1} jest analityczna w punkcie 0.

Załóżmy, że $g^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ dla dostatecznie małych liczb $|x|$. Udowodnimy, że ta równość wyznacza liczby $b_1, b_2, \ldots$. Wynika z niej i z twierdzenia o złożeniu funkcji analitycznych, że w pewnym otoczeniu 0 spełniona jest równość

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j \Big)^n = a_1 \big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big) + \\ + a_2 \big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big)^2 + a_3 \big(b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\big)^3 + \cdots.$$

Zmieniając kolejność sumowania otrzymujemy:

$$x = a_1 b_1 x + \big[a_1 b_2 + a_2 b_1^2\big] x^2 + \big[a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3\big] x^3 + \\ + \big[a_1 b_4 + 2a_2 b_1 b_3 + a_2 b_2^2 + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4\big] x^4 + \cdots.$$

Wynika z tej równości kolejno, że

$$b_1 = \tfrac{1}{a_1}$$
$$b_2 = -\tfrac{1}{a_1} \big[a_2 b_1^2\big];$$
$$b_3 = -\tfrac{1}{a_1} \big[2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3\big];$$
$$b_4 = -\tfrac{1}{a_1} \big[2a_2 b_1 b_3 + a_2 b_2^2 + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4\big].$$

....

Widzimy więc, że udaje się obliczyć kolejno $b_1, b_2, \ldots$ Wobec tego możliwe jest napisanie wzoru na funkcję odwrotną w postaci szeregu potęgowego, co prawie kończy dowód. Nie wiemy nic o zbieżności otrzymanego szeregu. Teoretycznie mogłoby się okazać, że jego promień zbieżności równy jest 0.

Zajmiemy się tym problemem. Ponieważ promień zbieżności szeregu $\sum a_n x^n$ jest dodatni, więc istnieje taka liczba $c > 0$, że szereg $\sum a_n c^n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wynika stąd, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c^n = 0$, zatem ciąg $\big(a_n c^n\big)$ jest ograniczony. Oznacza to, że istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $|a_n c^n| \leqslant M$, zatem $|a_n| \leqslant Mc^{-n}$. Zdefiniujemy pomocniczą funkcję analityczną za pomocą wzoru

$$h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots .$$

Znajdujemy współczynniki $d_1, d_2, \ldots$ szeregu Maclaurina funkcji h^{-1}. Wyrażamy je za pomocą wzorów otrzymanych na współczynniki funkcji g^{-1}, w których liczby a_1, a_2, a_3,... zastępujemy kolejno liczbami $|a_1|, -Mc^{-2}, -Mc^{-3}, \ldots$. Mamy więc

$d_1 = \frac{1}{|a_1|} \geqslant |b_1|$,

$d_2 = -\frac{1}{|a_1|}\big[-Mc^{-2}d_1^2\big] = \frac{1}{|a_1|}\big[Mc^{-2}d_1^2\big] \geqslant \Big| - \frac{1}{a_1}\big[a_2 b_1^2\big]\Big| = |b_2|$,

$d_3 = -\frac{1}{|a_1|}\big[-2Mc^{-2}d_1d_2 - Mc^{-3}d_1^3\big] =$

$= \frac{1}{|a_1|}\big[2Mc^{-2}d_1d_2 + Mc^{-3}d_1^3\big] \geqslant \Big| - \frac{1}{a_1}\big[2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\big]\Big| = |b_3|$.

Analogicznie $d_4 \geqslant |b_4|$ itd. (INDUKCJA!). Wynika stąd, że wystarczy wykazać, że promień zbieżności szeregu $\sum d_n x^n$ jest dodatni![26.1] Mamy

$y = h(x) = |a_1|x - Mc^{-2}x^2 - Mc^{-3}x^3 - \cdots =$

$= |a_1|x - \frac{Mc^{-2}x^2}{1-c^{-1}x} = \frac{|a_1|c^2x-(|a_1|c+M)x^2}{c^2-cx}$,

czyli $(|a_1|c+M)x^2-(cy+|a_1|c^2)x+c^2y = 0$. Otrzymane równanie kwadratowe rozwiązujemy bez trudu:

$x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\Big[(cy+|a_1|c^2) \pm \sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c+M)}\Big]$.

Ponieważ $h(0) = 0$, więc również $h^{-1}(0) = 0$. Stąd

[26.1] Ze zbieżności szeregu o większych, nieujemnych wyrazach wynika zbieżność szeregu o mniejszych, nieujemnych wyrazach.

$x = \frac{1}{2(|a_1|c+M)}\left[(cy+|a_1|c^2) - \sqrt{(cy+|a_1|c^2)^2 - 4c^2y(|a_1|c+M)}\right]$.
Wyraziliśmy x jako funkcję zmiennej y i to funkcję analityczną, bowiem złożenie funkcji analitycznych, suma i różnica funkcji analitycznych są funkcjami analitycznymi, wielomian i pierwiastek kwadratowy też są analityczne. Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionych twierdzeń wynika od razu, że funkcje analityczne w ustalonym punkcie tworzą zbiór zamknięty ze względu na dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie przez te, które nie przyjmują wartości 0. Można je też składać i odwracać. Wyjaśnia to, dlaczego praktycznie wszystkie, którymi się zajmujemy, są analityczne, czasem z wyjątkiem nielicznych punktów, jak np. funkcja $x^{13}|x|$, która nie jest analityczna w punkcie 0. Bardziej ambitny przykład to funkcja zdefiniowana równościami $f(x) = 0$ dla $x \leqslant 0$ i $f(x) = e^{-1/x}$ dla $x > 0$. Ta funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Mamy $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Gdyby była analityczna w punkcie 0, to zachodziłaby równość $f(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0^2}{2!}x^2 + \cdots = 0$ dla dostatecznie małych $|x|$, ale tak nie jest dla **żadnego** $x > 0$.

Przykład 26.3 Rozwiniemy funkcję $\frac{1}{(1+x)^3}$ w szereg potęgowy o środku w punkcie 0. Natychmiast nasuwają się trzy metody postępowania:

1° obliczyć pochodne funkcji w punkcie 0 i stwierdzić, że jest ona równa sumie swego szeregu Taylora w pewnym otoczeniu punktu 0, bo jest analityczna w tym punkcie jako iloraz funkcji analitycznych;

2° rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie 0 funkcję $\frac{1}{1+x}$ i podnieść wynik do trzeciej potęgi korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów zbieżnych bezwzględnie;

3° rozwinąć w szereg potęgowy o środku w punkcie 0 funkcję $\frac{1}{1+x}$ i skorzystać z wzoru $\left(\frac{1}{1+x}\right)'' = \frac{2}{(1+x)^3}$ oraz twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych.

Nie korzystamy z już poznanego wzoru dwumianowego Newtona $(1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}x^n$, choć to najłatwiejsza metoda w tym przypadku, bo na jednym prostym przykładzie pokazujemy, jak działają różne metody omijające postać reszty we wzorze Taylora.

1° Mamy $\big((1+x)^{-3}\big)^{(n)} = (-1)^n \frac{(n+2)!}{2!}(1+x)^{-3-n}$. W punkcie 0 ta pochodna równa jest $(-1)^n \frac{(n+2)!}{2!}$. Stąd wynika równość $(1+x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}x^n$ dla każdej liczby x, dla której szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!}x^n$ jest zbieżny, więc dla $x \in (-1,1)$.

2° Z wzoru na sumę szeregu geometrycznego dla $x \in (-1,1)$ wynika, że $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, a stąd:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-x)^k(-x)^{n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n .$$

Mnożymy dalej

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{(1+x)^2}\cdot\frac{1}{1+x} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)(-x)^k(-x)^{n-k}\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}(k+1)(-x)^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}(-x)^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}(-x)^n .$$

3° Mamy $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, zatem

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(-x)^{n-2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}(-x)^n . \ \blacksquare$$

Przykład 26.4 Niech $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ dla tych $x \in \mathbb{R}$, dla których $1 - x - x^2 \neq 0$, tzn. dla $x \neq \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Funkcja f jest analityczna jako iloraz dwu funkcji analitycznych. Znajdziemy jej szereg Taylora w punkcie 0. Zachodzi równość $1 - x - x^2 = -\big(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\big)\big(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\big)$. Oznaczmy $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Mamy $b + c = -1$, $bc = -1$ i $b - c = \sqrt{5}$. Wobec tego możemy napisać $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{(x-b)(x-c)} = \frac{-x}{b-c}\big(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}\big) =$

$$= \frac{-x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{c}\frac{1}{1-x/c} - \frac{1}{b}\frac{1}{1-x/b}\Big) = \frac{-x}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{c}\Big)^n - \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{b}\Big)^n\Big) =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{b}\Big)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{c}\Big)^{n+1}\Big) = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n(c^n - b^n) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}x^n((-c)^n-(-b)^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big(\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n-\big(\big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)\big)^n.\ \blacksquare$$

Przykład 26.5 Znajdziemy wzór na n–ty wyraz ciągu Fibonacciego, który jest zdefiniowany w następujący sposób: $a_1=1$, $a_2=1$ oraz $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Niech $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ dla tych x, dla których szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ jest zbieżny. Z definicji ciągu (a_n) wynika, że

$$x^2f(x)+xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+2}+a_1x^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}+a_1x^2=$$

$$=F(x)-(a_1x+a_2x^2)+a_1x^2=F(x)-a_1x=F(x)-x.$$

Stąd wynika, że $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ dla wszystkich tych x, dla których szereg jest zbieżny. Bez trudu (łatwa indukcja) dowodzimy, że $0<a_n<2^n$, a to oznacza, że dla każdego $x\in\big(-\frac12,\frac12\big)$ szereg jest zbieżny. Z rezultatów uzyskanych w poprzednim przykładzie wynika, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big(\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n-\big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big).$$

Oznacza to, że $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^n-\big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^n\Big)$. $\blacksquare$

Teraz udowodnimy twierdzenie udowodnione przez L.Eulera, z którego skorzystamy w dalszym ciągu. Samo twierdzenie też jest warte poznania.

Twierdzenie 26.21 (o postaci iloczynowej sinusa)
Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\sin x=x\big(1-\tfrac{x^2}{\pi^2}\big)\big(1-\tfrac{x^2}{4\pi^2}\big)\big(1-\tfrac{x^2}{9\pi^2}\big)\cdot\ldots=x\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\tfrac{x^2}{n^2\pi^2}\big).$$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie wielomiany P_n i Q_n stopnia n, że dla każdego $\alpha\in\mathbb{R}$ zachodzą równości

$\sin(2n+1)\alpha=\sin\alpha P_n(\sin^2\alpha)$ i $\cos(2n+1)\alpha=\cos\alpha Q_n(\cos\alpha)$.
Wynika to z następujących wzorów (indukcja):

$\sin(2n+1)\alpha = \sin\big((2n-1)\alpha + 2\alpha\big) = \sin(2n-1)\alpha\cos 2\alpha + {}$
$+ \sin 2\alpha \cos(2n-1)\alpha = \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)P_{n-1}(\sin^2\alpha) + {}$
$+ 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)Q_{n-1}(1-\sin^2\alpha)$;
$\cos(2n+1)\alpha = \cos\big((2n-1)\alpha + 2\alpha\big) = \cos(2n-1)\alpha\cos 2\alpha - {}$
$- \sin(2n-1)\alpha\sin 2\alpha = \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)Q_{n-1}(\cos^2\alpha) - {}$
$- 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)P_{n-1}(1-\cos^2\alpha)$.

Każda z liczb $\sin^2\frac{\pi}{2n+1} < \sin^2\frac{2\pi}{2n+1} < \ldots < \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ jest pierwiastkiem P_n, bo $0 = \sin(k\pi) = \sin\frac{k\pi}{2n+1}P_n(\sin^2\frac{k\pi}{2n+1})$ oraz $\sin\frac{k\pi}{2n+1} \neq 0$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Niech $x_k = \sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$ dla $k = 1,2,\ldots,n$. Wobec tego, że liczba pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu, istnieje taka liczba A_n, że równość

$$P_n(x) = A_n\big(1-\tfrac{x}{x_1}\big)\big(1-\tfrac{x}{x_2}\big)\ldots\big(1-\tfrac{x}{x_n}\big)$$

zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, zatem

$$\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha} = A_n\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_1}\big)\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_2}\big)\cdot\ldots\cdot\big(1-\tfrac{\sin^2\alpha}{x_k}\big).$$

Z równości $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha} = 2n+1$ i $\lim\limits_{\alpha\to 0}\big(1-\frac{\sin^2\alpha}{x_j}\big) = 1$ wynika, że $A_n = 2n+1$. Mamy więc

$$\sin(2n+1)\alpha = (2n+1)\cdot\sin\alpha\cdot$$
$$\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\Big).$$

Podstawiając $\alpha = \frac{x}{2n+1}$ otrzymujemy

$$\sin x = (2n+1)\cdot\sin\frac{x}{2n+1}\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Zajmiemy się granicą prawej strony przy $n \longrightarrow \infty$. Niech

$$r_{n,k}(x) = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right)\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{(k+2)\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}}\right).$$

Zakładać będziemy, że $k > 1$ jest tak dużą liczbą naturalną, że zachodzą nierówności $\frac{x^2}{4k^2} < \frac{1}{2}$ i $x^2 < k$.

Sinus jest funkcją ściśle wklęsłą na przedziale $[0,\pi]$, więc $\frac{2\alpha}{\pi} < \sin\alpha < \alpha$ dla $\alpha \in \big(0,\frac{\pi}{2}\big)$. Dalej zakładamy, że $n > \ell > k$. Mamy $\sin^2\frac{x}{2n+1} \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2}$ i $\sin^2\frac{\ell\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\frac{\ell^2\pi^2}{(2n+1)^2} = \frac{4\ell^2}{(2n+1)^2}$. Stąd wynika, że: $1 \geqslant 1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\ell\pi}{2n+1}} \geqslant 1 - \frac{x^2}{4\ell^2} \geqslant 1 - \frac{x^2}{\ell^2}$.

Jeśli $-1 < c_j \leqslant 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, m$, to zachodzi nierówność Bernoulliego $(1+c_1)(1+c_2)\ldots(1+c_m) \geqslant 1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m$ — łatwiutka indukcja. Mamy wobec tego

$r_{n,k}(x) \geqslant \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(k+2)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \geqslant$

$\geqslant 1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} - \frac{x^2}{(k+2)^2} - \cdots - \frac{x^2}{n^2} >$

$> 1 - \frac{x^2}{k(k+1)} - \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} - \cdots - \frac{x^2}{(n-1)n} =$

$= 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^2}{k+1} - \frac{x^2}{k+1} + \frac{x^2}{k+2} - \cdots - \frac{x^2}{n-1} + \frac{x^2}{n} = 1 - \frac{x^2}{k} + \frac{x^2}{n} > 1 - \frac{x^2}{k}$.

Z otrzymanego oszacowania wynika, że iloczyn

$s_{n,k}(x) = x\,\frac{\sin\frac{x}{2n+1}}{\frac{x}{2n+1}}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)$

znajduje się między liczbami $\sin x$ i $\frac{k}{k-x^2}\sin x$, bowiem $\sin x = s_{n,k}(x) \cdot r_{n,k}(x)$. Obliczając granicę otrzymujemy następującą równość $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n,k}(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, a z niej wynika, że $\sin x \leqslant x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant \frac{k}{k-x^2}\sin x$, jeśli $\sin x > 0$. Jeżeli natomiast $\sin x < 0$, to otrzymujemy nierówność $\sin x \geqslant x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \geqslant \frac{k}{k-x^2}\sin x$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika więc, że jeśli $\sin x \neq 0$, to zachodzi równość $\sin x = x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, której dowód był naszym celem. Jeśli natomiast $\sin x = 0$, to $x = \ell\pi$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ, ale wtedy $x\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = 0$, więc również w tym przypadku równość ma miejsce. ■

Uwaga 26.22

W istocie rzeczy wykazaliśmy, że zbieżność jest nie tylko punktowa, ale jednostajna na przedziałach ograniczonych, choć nie jest jednostajna na całej prostej. ■

Przykład 26.6 Jeśli liczba x nie jest całkowitą wielokrotnością liczby π, to zachodzi równość $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$.

Mamy $|\sin x| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right|\left|1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right|\ldots\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|\right)$, więc $\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$. Szereg pochodnych, czyli $\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{-2x}{n^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}$, jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale, który nie zawiera całkowitych wielokrotności liczby π, bo jeśli $k\pi < a \leqslant x \leqslant b < (k+1)\pi$, to $\left|\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\right| \leqslant \frac{2(1+|k|)\pi}{n^2\pi^2-(1+|k|)^2\pi^2} \leqslant \frac{2(1+|k|)}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2} = \frac{4(1+|k|)}{\pi n^2}$ dla każdej liczby naturalnej n, dla której $n^2-(1+|k|)^2 > \frac{1}{2}n^2$. Stąd i ze zbieżności szeregu $\sum\frac{1}{n^2}$ wynika jednostajna zbieżność szeregu pochodnych na przedziale $[a,b]$. Wobec tego wolno różniczkować szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$ „wyraz po wyrazie", zatem

$$\operatorname{ctg} x = (\ln|\sin x|)' = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\,. \blacksquare$$

Przykład 26.7 Przedstawimy funkcję $x\operatorname{ctg} x$ w postaci sumy szeregu potęgowego o środku w punkcie 0 — jest to możliwe, bo funkcja $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots}$ jest analityczna w punkcie 0 i wobec tego funkcja $x\operatorname{ctg} x = \frac{x}{\sin x}\cdot\cos x$ jest analityczna jako iloczyn funkcji analitycznych. Jeśli $|x|<\pi$ i $n\geqslant 1$, to $\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2} = \frac{-2x^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-x^2/(n\pi)^2} = \frac{-2x^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^k = -2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2(k+1)}$. Szeregi te są zbieżne bezwzględnie, więc

$x\operatorname{ctg} x = 1+\frac{2x^2}{x^2-n^2\pi^2} = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2(k+1)} =$
$= 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2k} = 1-2\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}\pi^{2k}}\right)$.

Przypomnijmy, że $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, więc $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$. Wobec tego $x\operatorname{ctg} x = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\,x^{2k}$. Mamy $\big(x\operatorname{ctg} x\big)' = \operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x\sin x - x}{\sin^2 x}$. Obliczamy drugą pochodną w zerze: $\big(x\operatorname{ctg} x\big)''_{x=0} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h\sin h-h}{h\sin^2 h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(1-h^2/2)(h-h^3/6)-h}{h^3} = -\frac{2}{3}$ — zastąpiliśmy funkcje kosinus i sinus ich trzecimi wielomianami Taylora. Stąd wniosek: $\frac{1}{2}\big(-\frac{2}{3}\big) = -\frac{2}{\pi^2}\zeta(2) = -\frac{2}{\pi^2}\big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\big)$, zatem $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. $\blacksquare$

Uwaga 26.23 (o funkcjach hiperbolicznych)
Podamy teraz definicje kosinusa i sinusa hiperbolicznego.
$\cosh x = \frac{1}{2}\big(e^x+x^{-x}\big)$, $\sinh x = \frac{1}{2}\big(e^x-x^{-x}\big)$.

Czytelnik sprawdzi, że jeśli $x,y\in\mathbb{R}$, to zachodzą równości

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y\,,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1\,.$$

Podobnie jak w przypadku kosinusa i sinusa można udowodnić, że podane równości jednoznacznie definiują te funkcje.

Definiowany jest również tangens hiperboliczny i kotangens hiperboliczny: $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ i $\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$. Można dowieść, że $\sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\big)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Z tego wzoru Czytelnik może wyprowadzić wzór $\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2\pi^2}$. Można też wykazać, że $x \operatorname{ctgh} x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$. ■

Przykład 26.8 Opowiemy krótko o tzw. liczbach Bernoulliego, które zaczął używać Jacob Bernoulli (1654 – 1705)[26.2] w związku z wzorami na sumę potęg kolejnych liczb naturalnych.

Wykażemy najpierw, że dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 0$ istnieje taki wielomian w_k stopnia $k+1$, że dla każdego n zachodzi wzór $1^k + 2^k + \cdots + n^k = w_k(n)$. Dla $k = 0$ mamy $1^0 + 2^0 + \cdots + n^0 = n$, więc $w_0(n) = n$. Dla $k = 1$ mamy $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = w_1(n)$. Załóżmy, że dla każdego $j = 0, 1, \ldots, k$ istnieje taki wielomian stopnia $j+1$, że dla każdego naturalnego n zachodzi wzór

$$1^j + 2^j + \cdots + n^j = w_j(n)\,.$$

Napiszmy wzory:

$$(1+1)^{k+1} - 1^{k+1} = \binom{k+1}{k}1^k + \binom{k+1}{k-1}1^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}1 + 1\,,$$
$$(2+1)^{k+1} - 2^{k+1} = \binom{k+1}{k}2^k + \binom{k+1}{k-1}2^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}2 + 1\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{k+1}{k}n^k + \binom{k+1}{k-1}n^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{1}n + 1\,.$$

Dodając je stronami i korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$$n^{k+1} + \binom{k+1}{k}n^k + \cdots + \binom{k+1}{1}n = (n+1)^{k+1} - 1 =$$
$$= \binom{k+1}{k}(1^k + 2^k + \cdots + n^k) + \binom{k+1}{k-1}(1^{k-1} + 2^{k-1} + \cdots + n^{k-1}) +$$

[26.2] Książkę, w której pojawiły się te liczby opublikowano 8 lat po jego śmierci, w 1713 r

$+\cdots+\binom{k+1}{k}(1+2+\cdots+n)+n=\binom{k+1}{k}(1^k+2^k+\cdots+n^k)+$
$+\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{1}w_1(n)+\binom{k+1}{0}w_0(n)$, zatem

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\tfrac{1}{k+1}\Big[n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n-$$
$$-\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)-\ldots-\binom{k+1}{1}w_1(n)-\binom{k+1}{0}w_0(n)\Big].$$

n^{k+1} występuje w nawiasie tylko raz, zatem istnieje taki wielomian w_k stopnia $k+1$, że $1^k+2^k+\cdots+n^k=w_k(n)$.

Niech $w_j(n)=a_{j,0}+a_{j,1}n+a_{j,2}n^2+\cdots+a_{j,j+1}n^{j+1}$ dla $j=1,2,\ldots$. Mamy więc

$$w_k(n)=\tfrac{1}{k+1}\Big(n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n-$$
$$-\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)-\cdots-\binom{k+1}{1}w_1(n)-\binom{k+1}{0}w_0(n)\Big).$$

Oznacza to, że dla każdego n zachodzi równość

$$n^{k+1}+\binom{k+1}{k}n^k+\cdots+\binom{k+1}{1}n=$$
$$=\binom{k+1}{k}w_k(n)+\binom{k+1}{k-1}w_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{1}w_1(n)+\binom{k+1}{0}w_0(n).$$

Współczynniki przy n^i po obu stronach równości są równe, więc

$$\binom{k+1}{i}=\binom{k+1}{k}a_{k,i}+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1,i}+\cdots+\binom{k+1}{i-1}a_{i-1,i} \qquad (\spadesuit)$$

oraz $a_{j,0}=w_j(0)=0$ dla $j=1,2,\ldots$ — prosta indukcja.

Jeśli $i=k+1$, to $1=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+1}{k}a_{k,k+1}$, stąd $a_{k,k+1}=\frac{1}{k+1}$.

Dalej $k+1=\binom{k+1}{k}a_{k,k}+\binom{k+1}{k-1}a_{k-1,k}=(k+1)a_{k,k}+\frac{(k+1)k}{2}\cdot\frac{1}{k}$, zatem $a_{k,k}=\frac{1}{2}$ dla $k=1,2,\ldots$

Oznaczmy $b_{j,i}=a_{j,i}$ dla $j\neq i$ oraz $b_{i,i}=-a_{i,i}=-\frac{1}{2}$. Dla $i=1,2,\ldots,k$ równość $(\spadesuit)$ można więc przepisać w taki sposób

$$0=\binom{k+1}{k}b_{k,i}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,i}+\cdots+\binom{k+1}{i-1}b_{i-1,i}. \qquad (\heartsuit)$$

Wraz z równością $b_{i-1,i}=a_{i-1,i}=\frac{1}{i}$, pozwala on na znajdowanie kolejnych liczb $b_{j,i}$. Dla kolejnych $i=1,2,\ldots,k$ otrzymujemy:

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,1}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,1}+\cdots+\binom{k+1}{0}b_{0,1}, \quad b_{0,1}=1,$

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,2}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,2}+\cdots+\binom{k+1}{1}b_{1,2}, \quad b_{1,2}=\frac{1}{2},$

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,3}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,3}+\cdots+\binom{k+1}{2}b_{2,3}, \quad b_{2,3}=\frac{1}{3},$

....

$0=\binom{k+1}{k}b_{k,k}+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1,k}, \quad b_{k-1,k}=\frac{1}{k}.$

Wykażemy, że dla każdego $p\in\mathbb{N}$ i każdego $k\geqslant p-1$ zachodzi wzór $b_{k+1,p+1}=\frac{k+1}{p+1}b_{k,p}$. Zastosujemy indukcję względem k.

Dla $k=p-1$ mamy $b_{p-1+1,p+1}=\frac{1}{p+1}=\frac{p}{p+1}\cdot\frac{1}{p}=\frac{p-1+1}{p+1}b_{p-1,p}$. Załóżmy, że $b_{j+1,p+1}=\frac{j+1}{p+1}b_{j,p}$ dla wszystkich $j\in[p-1,k]\cap\mathbb{Z}$. Z równości $(\heartsuit)$, w której zastępujemy k przez $k+2$ wynika, że
$b_{k+2,p+1}=-\frac{1}{k+3}\left[\binom{k+3}{k+1}b_{k+1,p+1}+\binom{k+3}{k}b_{k,p+1}+\dots+\binom{k+3}{p}b_{p,p+1}\right]=$
$=-\frac{1}{k+3}\left[\binom{k+3}{k+1}\frac{k+1}{p+1}b_{k,p}+\binom{k+3}{k}\frac{k}{p+1}b_{k-1,p}+\dots+\binom{k+3}{p}\frac{p}{p+1}b_{p-1,p}\right]=$
$=-\frac{1}{p+1}\left[\binom{k+2}{k}b_{k,p}+\binom{k+2}{k-1}b_{k-1,p}+\dots+\binom{k+2}{p-1}b_{p-1,p}\right]=$
$=\frac{1}{p+1}\binom{k+2}{k+1}b_{k+1,p}=\frac{k+2}{p+1}b_{k+1,p}$ — przedostatnia równość to konsekwencja wzoru $(\heartsuit)$. Indukcja została zakończona.

Stosując udowodnioną równość $p-1$ razy otrzymujemy
$b_{k,p}=\frac{k}{p}b_{k-1,p-1}=\frac{k(k-1)}{p(p-1)}b_{k-2,p-2}=\ldots=\frac{k(k-1)\ldots(k-p+2)}{p(p-1)\ldots2}b_{k-p+1,1}$.
Z otrzymanej właśnie równości wynika, że jeśli znamy wyrazy ciągu $(b_{k,1})_{k=0}^{\infty}$, to możemy znaleźć liczby $b_{k,i}$ dla $i\leqslant k+1$.

Niech $b_k=b_{k,1}$. Dla $k\geqslant1$ mamy więc

$$\binom{k+1}{k}b_k+\binom{k+1}{k-1}b_{k-1}+\dots+\binom{k+1}{1}b_1+\binom{k+1}{0}b_0=0 \qquad (\mathbf{B}),$$

zatem

$$\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!}=0 \qquad (\clubsuit).$$

Niech $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$. Jeśli promień zbieżności tego szeregu jest dodatni, to z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu szeregów wynika, że każdego x z przedziału zbieżności zachodzi równość
$g(x)(e^x-1)=b_0x+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!})x^{k+1}$,
gdzie $b_0=1$. Jeśli promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$ jest dodatni, to $g(x)\big(e^x-1\big)=x$, zatem $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n=g(x)=\frac{x}{e^x-1}$.
Funkcja $\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+x/2!+x^2/3!+\cdots}$ jest analityczna w punkcie 0, bo jest ilorazem funkcji analitycznych w tym punkcie. Jeśli $\frac{x}{e^x-1}=$ $=B_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$, $B_0=1$, to zastępując w równościach $(\clubsuit)$ liczby $b_1,b_2,\ldots$ liczbami $B_1,B_2,\ldots$ otrzymujemy wzory:

$$\frac{1}{1!}\frac{B_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{B_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{B_0}{0!}=0.$$

Ponieważ te wzory jednoznacznie definiują ciąg (B_n) i $b_0=B_0$, więc $b_n=B_n$ dla każdego n. Wykazaliśmy zatem, że $\frac{x}{e^x-1}=$ $=b_0x+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{1!}\frac{b_k}{k!}+\frac{1}{2!}\frac{b_{k-1}}{(k-1)!}+\dots+\frac{1}{k!}\frac{b_1}{1!}+\frac{1}{(k+1)!}\frac{b_0}{0!})x^{k+1}=g(x)$.

Zauważmy, że funkcja

$h(x) := g(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{x}{2}\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = \frac{x}{2}\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}$ jest parzysta, więc jej pochodne nieparzystego rzędu w punkcie 0 są równe 0. Mamy $h^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = b_n$ dla $n = 2,3,\ldots$ i $h'(0) = g'(0) + \frac{1}{2}$. Wobec tego $b_{2n+1} = 0$ dla $n = 1,2,\ldots$ i $h'(0) = 0$, więc $g'(0) = -\frac{1}{2}$.

Liczby $B_0, B_1, B_2, \ldots$ nazywane są często liczbami Bernoulliego. Z wzoru **(B)** wynikają kolejno równości: $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$ itd.

Przypomnijmy, że dla $|x| < \pi$ zachodzi wzór [26.3] $x\operatorname{ctgh} x = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$. Wynika stąd, że

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\zeta(2n)\frac{x^{2n}}{2^{2n}\pi^{2n}} = \frac{x}{2}\operatorname{ctgh}\frac{x}{2} = g(x) + \frac{x}{2} = 1 + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n},$$

więc $2(-1)^{n-1}\frac{\zeta(2n)}{2^{2n}\pi^{2n}} = \frac{B_{2n}}{(2n)!}$, co można przepisać w postaci

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots = \zeta(2n) = (-1)^{n-1}B_{2n}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

W przykładzie 26.7 udowodniona została następującą równość $x\operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2n}}\zeta(2n)\,x^{2n}$, którą teraz zapiszemy tak

$$x\operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^{2n}}(-1)^{n-1}B_{2n}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}\,x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}x^{2n}.$$

Mamy $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cos x} = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2\operatorname{ctg} 2x$, zatem

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{x}\big(x\operatorname{ctg} x - 2x\operatorname{ctg} 2x\big) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}\big(x^{2n} - (2x)^{2n}\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}(1-2^{2n})}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1}.$$

Znaleźliśmy szereg Maclaurina funkcji tangens. Wszystkie pochodne nieparzystego rzędu funkcji tangens są dodatnie, zatem $(-1)^{n-1}B_{2n} > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Liczby $B_2, B_6, B_{10}, \ldots$ są więc dodatnie, zaś liczby $B_4, B_8, B_{12}, \ldots$ — ujemne. Kończymy krótki przegląd zagadnień związanych z liczbami Bernoulliego. ■

[26.3] zob. uwaga 26.23

Zadania

1. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest nieparzysta i analityczna w punkcie 0, to $f^{(2n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji f, jeśli $f(x) =$

1. $(1+x)\ln(1+x)$;
2. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;
3. $\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;
4. $\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;
5. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;
6. $\arccos(1-2x^2)$;
7. $x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;
8. $x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$;
9. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;
10. $(1+x)e^{-x}$;
11. $e^x \sin x$;
12. $(1-x)^2\cosh\sqrt{|x|}$;
13. $\big(\ln(1-x)\big)^2$;
14. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
15. $e^x\cos x$;
16. $(1+x)^{-1}\ln(1+x)$;
17. $\cos(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;
18. $x^{-2}(\arcsin x)^2$;
19. $\cos^2 x$;
20. $\sin^3 x$;
21. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$;
22. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
23. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-1}$;
24. $(1+x+x^2)^{-1}$;
25. $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
26. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
27. $\sin(b\arcsin x)$, $b \in \mathbb{R}$;
28. $(\operatorname{arctg} x)^2$;
29. $\sin(b\arccos x)$, $b \in \mathbb{R}$;
30. $\sin(3x)\sin(5x)$.

3. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}x^n$, $p \in \mathbb{R}$;

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(3^n + (-2)^n\big)x^n$;

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^n$;

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\Big)^p x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n$, $a \in (0,1)$;

f. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

h. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$;

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}x^n$;

j. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sin^n n}x^n$;

k. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^n\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)x^n$;

l. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}a^n+\frac{1}{n^2}b^n\right)^{n^2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

m. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}10^{\ell(n)}(2-x)^n$, $\ell(n)$ to liczba cyfr liczby n.

4. Przedstawić funkcję $\ln(2+2x+x^2)$ w postaci $\sum a_n(x+1)^n$.

5. Przedstawić funkcję $(1-x)^{-1}$ w postaci $\sum a_n\frac{1}{x^n}$.

6. Przedstawić funkcję $\ln x$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

7. Przedstawić funkcję $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ w postaci $\sum a_n\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$.

8. Zsumować szereg

a. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$; b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$;

c. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$;

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}x^n$; f. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$;

g. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2x^n$; h. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

9. Znaleźć n–tą pochodną w punkcie 0 funkcji

a. e^{x^2}; b. $\mathrm{arctg}(2x)$.

10. Znaleźć n–tą pochodną funkcji

a. e^{x^2}; b. $\mathrm{arctg}(2x)$; c. $e^{10/x}$.

11. Niech $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ dla $x<1$. Znaleźć $F^{(n)}(0)$.

12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest analityczna oraz $a<x_0<b$, to $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ dla każdej liczby x, dla której szereg występujący po prawej stronie równości jest zbieżny.

13. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon(-2,2)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $[-1,1]$ i $f^{(n)}(x)\geqslant 0$ dla każdego n i każdego $x\in[-1,1]$, to funkcja ta jest analityczna w przedziale $(-1,1)$ promień zbieżności i promień zbieżności jej szeregu Maclaurina nie jest mniejszy niż 1.

14. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna oraz $|f^{(n)}(x)|\leqslant c^n$ dla każdego $x\in(a,b)$ i każdego $n\in\mathbb{Z}$, to dla dowolnych $x,x_0\in(a,b)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$