CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE II

Widzieliśmy już, że wiele funkcji można zapisać w postaci sumy szeregu lub granicy ciągu. Podamy teraz twierdzenie, które pozwala w licznych sytuacjach obliczać pochodną granicy ciągu funkcyjnego. Zaczniemy od przykładu pokazującego, że rzecz wymaga pewnego zastanowienia.

Przykład 25.1 Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x)$. Jasne jest, że zachodzi nierówność $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, więc ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej. Mamy $f_n'(x) = n^2\frac{1}{n}\cos(n^2x) = {=}n\cos(n^2x)$, więc $f_n'(0) = n$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \infty$. Jeśli n jest liczbą parzystą, to $f_n'(\pi) = n$. Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $f_n'(\pi) = -n$. Ciąg $(f_n'(\pi))$ w ogóle nie ma granicy (ani skończonej ani nieskończonej). Wynika stąd, że z jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego nie wynika jednostajna zbieżność ciągu pochodnych, nie wynika nawet punktowa i to nawet wtedy, gdy granica jest funkcją różniczkowalną. ■

Bardzo użyteczne bywa twierdzenie, które mówi, że jednak przy pewnych założeniach pochodna granicy ma związek z pochodnymi wyrazów ciągu.

Twierdzenie 25.1 (o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych) Załóżmy, że (F_n) jest ciągiem funkcji ciągłych określonym na przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz że każda funkcje F_n jest różniczkowalna na przedziale otwartym (a,b). Jeśli ciąg (F_n') jest jednostajne zbieżny na przedziale (a,b) do funkcji f, a ciąg (F_n) jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie przedziału $[a,b]$, to

25.1.1 ciąg (F_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[a,b]$ do pewnej funkcji F i

25.1.2 $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$, co można zapisać też tak $\big(\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)\big)' = \lim\limits_{n\to\infty} F_n'(x)$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że ciąg (F_n) jest zbieżny jednostajnie. Niech $p \in [a,b]$ będzie takim punktem, że ciąg $(F_n(p))$ jest zbieżny. Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje n_ε takie, że dla każdych $n,k > n_\varepsilon$ i dowolnego x zachodzą nierówności $|F'_n(x) - F'_k(x)| < \varepsilon$ oraz $\big|F_n(p) - F_k(p)\big| < \varepsilon$. Wobec tego

$$|F_n(x) - F_k(x)| \leqslant \Big|F_n(x) - F_k(x) - \big(F_n(p) - F_k(p)\big)\Big| + \\ + \big|F_n(p) - F_k(p)\big| = \\ = \big|F'_n(c_x) - F'_k(c_x)\big|\big|x - p\big| + \big|F_n(p) - F_k(p)\big| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Zastosowaliśmy twierdzenie Lagrange'a do funkcji $F_n - F_k$! Ciąg $\big(F_n\big)$ jest więc ciągiem Cauchy'ego, zatem jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji F. Funkcja ta jest ciągła jako granica ciągu funkcji ciągłych zbieżnego jednostajnie.

Wykażemy, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego x. Stosując znów twierdzenie Lagrange'a do różnicy $F_n - F_k$ otrzymujemy dla dostatecznie dużych n i k nierówność

$$\left|\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} - F'_n(x) - \left(\frac{F_k(x+h) - F_k(x)}{h} - F'_k(x)\right)\right| = \\ = \left|F'_n(c_{n,k}) - F'_n(x) - \left(F'_k(c_{n,k}) - F'_k(x)\right)\right| < \varepsilon$$

— bowiem dla dostatecznie dużych n,k i dowolnego t zachodzi nierówność

$$\big|F'_n(t) - F'_n(t)\big| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

którą stosujemy w przypadku $t = c_{n,k}$ oraz $t = x$. Ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(t) = F(t)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} F'_k(t) = f(t)$, więc dla dostatecznie dużego n wszystkich liczb $x \in [a,b]$ i wszystkich takich h, że $x + h \in [a,b]$, zachodzi nierówność

$$\left|\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} - F'_n(x) - \left(\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Dla ustalonego, dostatecznie dużego n i ustalonego x istnieje taka liczba $\delta_n > 0$, że

$$0 < |h| < \delta_n \Rightarrow \left|\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} - F'_n(x)\right| < \varepsilon,$$

jeśli tylko $x+h\in I$. Stąd wynika, że jeśli $0<|h|<\delta_n$, to

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leqslant\varepsilon+\left|\frac{F_n(x+h)-F_n(x)}{h}-F_n'(x)\right|\leqslant 2\varepsilon$$

dla tego ustalonego x, jeśli $x+h\in I$. Oznacza to, że zachodzi równość $f(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, tzn. $f(x)=F'(x)$. ∎

Uwaga 25.2

Jeśli pochodne $F_1',F_2',\ldots$ są ciągłe, to ich granica f też, bo granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest ciągła. ∎

Z twierdzenia o różniczkowaniu ciągów wynika

Twierdzenie 25.3 (o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego)

Niech $\sum F_n$ będzie takim szeregiem funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$, różniczkowalnych na przedziale (a,b), że szereg $\sum F_n'$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale (a,b) a szereg $\sum F_n$ jest zbieżny w co najmniej jednym punkcie przedziału $[a,b]$. Wtedy szereg $\sum F_n$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[a,b]$, jego suma jest funkcją różniczkowalną i dla każdego $x\in(a,b)$ zachodzi równość $\big(\sum F_n(x)\big)'=\sum F_n'(x)$. ∎

Uwaga 25.4

Nie korzystaliśmy w dowodzie tego twierdzenia w istotny sposób z żadnych własności funkcji określonych na przedziale domkniętym. Oznacza to, że w twierdzeniu o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych możemy zastąpić przedział domknięty $[a,b]$ przedziałem (a,b), $[a,b)$ lub $(a,b]$ zakładając, że $-\infty<a<b<\infty$. Czytelnik zechce zastanowić się nad tym, gdzie wykorzystujemy założenie $-\infty<a<b<\infty$ i sformułować twierdzenie w przypadku przedziału nieskończonego. ∎

Udowodnimy teraz bardzo twierdzenie, z którego później skorzystamy kilka razy.

Twierdzenie 25.5 (o istnieniu funkcji pierwotnej)
Jeśli $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem a $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to istnieje taka funkcja $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in I$ zachodzi równość [25.1] $F'(x) = f(x)$.

Dowód. Niech a będzie lewym końcem przedziału I, b — prawym, być może $a = -\infty$ lub $b = \infty$. Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem zbieżnym do a, (b_n) — niemalejącym ciągiem zbieżnym do b i niech $a < a_1 < b_1 < b$. Mamy więc

$$[a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq \ldots [a_n, b_n] \subseteq \ldots \quad \text{i} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = (a, b).$$

Załóżmy jeszcze, że jeśli $a \in I$, to $a_n = a$ dla $n = 1, 2, \ldots$, a jeśli $b \in I$, to $b_n = b$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Niech w_n będzie takim wielomianem, że dla każdej liczby $x \in [a_n, b_n]$ zachodzi nierówność $|w_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$.[25.2] Z tego, że $[c, d] \subseteq I$ wynika istnienie takiego $k \in \mathbb{N}$, że $[c, d] \subseteq [a_k, b_k]$. Wobec tego nierówność $|w_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ zachodzi dla $n \geqslant k$ i $x \in [a_k, b_k]$. Wynika stąd jednostajna zbieżność ciągu (w_n) na przedziale $[a_k, b_k]$, więc również na przedziale $[c, d]$.

Niech p będzie dowolnym punktem przedziału (a_1, b_1). Niech W_n oznacza taki wielomian, że $W_n(p) = 0$ i $W_n'(x) = w_n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Taki wielomian W_n istnieje: jeśli zachodzi równość $w_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, to przyjmujemy

$$W_n(x) = a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \tfrac{1}{m+1} a_m x^{m+1} - \\ - \left[a_0 p + \tfrac{1}{2} a_1 p^2 + \tfrac{1}{3} a_2 p^3 + \cdots + \tfrac{1}{m+1} a_m p^{m+1}\right].$$

Z twierdzenia o różniczkowalności ciągu funkcyjnego wynika od razu, że ciąg (W_n) jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji F na przedziale $[c, d]$ i $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [c, d]$.

Zauważmy jeszcze, że żadnych ograniczeń na przedział $[c, d]$

[25.1] W końcu przedziału pochodna jednostronna.

[25.2] Istnienie takiego wielomianu wynika z twierdzenia Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami.

nie nakładaliśmy. Oczywiście dla każdego $x \in I$ istnieją takie liczby c, d, że $x \in [c, d]$, a stąd wynika, że równość $F'(x) = f(x)$ zachodzi dla każdej liczby $x \in I$. ∎

Przypomnijmy, że z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika natychmiast, że jeśli $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$ dla każdego $x \in I$, to istnieje taka liczba C, że dla każdego $x \in I$ zachodzi równość $F_2(x) = F_1(x) + C$, czyli funkcja F, której istnienie wykazaliśmy nie jest co prawda określona jednoznacznie, ale z dokładnością do stałej.

Uwaga 25.6

Z dowodu twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej możemy łatwo wyeliminować twierdzenie Weierstrassa o przybliżaniu funkcji ciągłych wielomianami. Wystarczy zamiast wielomianami przybliżać funkcjami przedziałami liniowymi, czyli funkcjami postaci

$$ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|,$$

w rozdziale poświęconym ciągom i szeregom funkcyjnym wykazaliśmy, że jest to możliwe. Mamy oczywiście $\left(\frac{1}{2}|x|x\right)' = |x|$ dla **każdego** $x \in \mathbb{R}$. Z tego wzoru wnioskujemy bez trudu, że

$$\tfrac{1}{2}\big(ax^2 + 2bx + a_1|x - x_1|(x - x_1) + a_2|x - x_2|(x - x_2) + \\ + \cdots + a_n|x - x_n|(x - x_n)\big)' = \\ = ax + b + a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \cdots + a_n|x - x_n|.$$

W dowodzie zamiast wielomianów w_n używamy funkcji przedziałami liniowych — to jedyna zmiana. ∎

Następne dwa twierdzenia ilustrują możliwe kłopoty z różniczkowalnością.

Twierdzenie 25.7

Dla każdego ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$ i która nie pochodnej w żadnym z punktów $a_1, a_2, \ldots$

Dowód. Możemy oczywiście założyć, że jeśli $i \neq j$, to $a_i \neq a_j$, czyli że w ciągu (a_n) nie ma powtórzeń — wystarczy wykreślić wszystkie wyrazy, które pojawiły się w ciągu wcześniej.

Niech $g(x) = \sin|x|$. Funkcja g jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$ — wynika to z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji. W punkcie 0 pochodne jednostronne są różne, więc funkcja różniczkowalna nie jest, ale jest ciągła.

Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$. Dla każdego n zachodzi nierówność $|2^{-n}g(x-a_n)| \leqslant 2^{-n}$, a ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ jest zbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}g(x-a_n)$ jest jednostajnie zbieżny (kryterium Weierstrassa), zatem jego suma jest funkcją ciągłą.

Załóżmy, że $x \neq a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i że $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba naturalna k, że $\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1} < \frac{\varepsilon}{3}$. Mamy też $|g(x+h) - g(x)| = \big|\sin|x+h| - \sin|x|\big| \leqslant \big||x+h| - |x|\big| \leqslant |h|$, więc $\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| = \left|\frac{\sin|x+h|-\sin|x|}{h}\right| \leqslant \frac{|h|}{|h|} = 1$. Wynika stąd, że
$\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n}g(x+h-a_n) - \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n}g(x-a_n)\right)\right| =$
$= \left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{g(x+h-a_n)-g(x-a_n)}{h}\right| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left|\frac{g(x+h-a_n)-g(x-a_n)}{h}\right| \leqslant$
$\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Z różniczkowalności funkcji g poza punktem 0 wynika, że istnieje taka liczba $\delta_k > 0$, że jeśli $0 < |h| < \delta_k$, to

$$\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g(x+h-a_n) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g(x-a_n)\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g'(x-a_n)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Stąd i z tego, że $|g'(x)| \leqslant 1$ wynika, że jeśli $0 < |h| < \delta_k$, to

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-a_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g(x+h-a_n) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g(x-a_n)\right) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{2^n}g'(x-a_n)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(x+h-a_n) - \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}g(x-a_n)\right)\right| + \left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}g'(x-a_n)\right| <$$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Wynika z tych oszacowań, że $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'(x-a_n)$.

Zauważmy teraz, że funkcja $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest różniczkowalna dla każdego $x \in \mathbb{R}$ z wyjątkiem punktów $a_2, a_3, \ldots$, w szczególności jest różniczkowalna w punkcie a_1. Ponieważ funkcja $g(x-a_1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n) - \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ nie jest różniczkowalna w punkcie a_1, więc funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest nieróżniczkowalna w punkcie a_1. W taki sam sposób można udowodnić, że funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g(x-a_n)$ jest nieróżniczkowalna w punktach a_2, a_3, … ■

Twierdzenie 25.8 (**funkcja ciągła nigdzie nieróżniczkowalna** [25.3])
Istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie.

Dowód. Niech $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Tę funkcję przedłużamy na całą prostą tak, by równość $u(x+1) = u(x)$ zachodziła dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$. Niech $u_n(x) = 4^{-n} u(4^n x)$. [25.4]
Niech $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Szereg $\sum u_n$ jest jednostajnie zbieżny na całej prostej, bo $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{4}{3} < \infty$. Wobec tego, że funkcje $u_0, u_1, \ldots$ są ciągłe, funkcja f jest ciągła. Wykażemy, że nie ma ona skończonej pochodnej w żadnym punkcie (jednostronne nieskończone ma w wielu punktach).

Ustalmy x oraz n. Niech h_n będzie taką liczbą, że na przedziale $P_{x,n}$ o końcach x, $x + h_n$ funkcja u_n jest monotoniczna i $|h_n| = 4^{-n-1}$. Oznacza to, że między punktami x i $x + h_n$ nie ma ani jednego punktu postaci $\frac{p}{2} \cdot 4^{-n}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$. Wynika stąd, że jeśli $k \leqslant n$, to funkcja u_k jest monotoniczna na

[25.3] Twierdzenie udowodnił Weierstrass, a podany niżej dowód pochodzi od van der Waerdena

[25.4] A może Czytelnik narysuje sobie wykresy u_0, u_1 ?

przedziale $P_{x,n}$. Jasne jest też, że $\frac{u_k(x+h_n)-u_k(x)}{h_n} = \pm 1$. Jeśli $k > n$, to $u_k(x+h_n) = u_k(x)$, bo okresem funkcji u_k jest liczba 4^{-k}, więc liczba $4^{-n} = 4^{k-n} \cdot 4^{-k}$ jako wielokrotność okresu jest też okresem funkcji u_k. Stąd wynika, że iloraz $\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ jest sumą $n+1$ składników, z których każdy równy jest ± 1, więc jest liczbą nieparzystą, gdy n jest parzyste i parzystą, gdy n jest nieparzyste. Wynika stąd, że wartość bezwzględną różnicy między kolejnymi wyrazami ciągu $\left(\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\right)$ nie jest mniejsza niż 1, więc ciąg ten nie ma granicy skończonej. Jeśli więc funkcja f ma pochodną w punkcie x, to ta pochodna jest nieskończona. ■

Uwaga 25.9 A.S.Besicovitch podał przykład funkcji ciągłej, która w żadnym punkcie nie ma ani jednej pochodnej jednostronnej (ani skończonej ani nieskończonej), ale jego przykład jest istotnie trudniejszy od podanego w tekście i został podany kilkadziesiąt lat po pojawieniu się przykładu Weierstrassa. Oryginalny przykład Weiertrassa był nieco inny od podanego w dowodzie. Była to funkcja postaci $\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, gdzie oznacza liczbę całkowitą nieparzystą, $b \in (0,1)$ oraz $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Później założenia o liczbach a i b zostały istotnie osłabione: wystarczy założyć, że $0 < b < 1$ i $ab \geqslant 1$, zob. Hardy G. H., *Weierstrass's nondifferentiable function*, Transactions of the American Mathematical Society 17(1916), strony 301-325. Później okazało się, że funkcje o tak nieoczekiwanych własnościach pojawiają się w fizyce, np. w modelu matematycznym ruchów Browna. ■

Zadania

1. Podać przykład takiego ciągu (f_n) funkcji różniczkowalnych na całej prostej, który jest jednostajnie zbieżny do funkcji zerowej, że ciąg (f_n') jego pochodnych jest zbieżny punktowo do funkcji niezerowej.

2. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna, którą skonstruowaliśmy w tym rozdziale, nie jest monotoniczna na żadnym przedziale.

3*. Dowieść, że funkcja ciągła, nigdzie nieróżniczkowalna zdefiniowana w tym rozdziale ma nieskończoną pochodną w co najmniej jednym punkcie.

4. Niech I_1, I_2, ... będą otwartymi przedziałami parami rozłącznymi. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, że $f(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$

5. Niech $G_1 \subseteq \mathbb{R}$, $G_2 \subseteq \mathbb{R}$, ... będą zbiorami otwartymi (G_n jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in G_n$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $(x-\delta, x+\delta) \subseteq G_n$). Załóżmy, że $G_1 \cup G_2 \cup \ldots = \mathbb{R}$. Dowieść, ze istnieją takie funkcje $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, że jeśli $f_n(x) > 0$, to $x \in G_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

6*. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Dowieść, że istnieje taka nieskończenie wiele razy różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(0) = a_n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ *Jeśli dla pewnej liczby $r > 0$ szereg $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny na pewnym przedziale $(-r, r)$, a g jest taką nieujemną funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że jeśli $|x| \leqslant \frac{1}{3}r$, to $g(x) = 1$ a jeśli $|x| \geqslant \frac{2}{3}r$, to $g(x) = 0$, to możemy przyjąć, że $\varphi(x) = a_0 g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$, funkcja g istnieje, zob. zad 37 z poprzedniego rozdzialu i poprawiać wzór dalej.*

7! Dowieść, że jeśli I jest przedziałem, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, to dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka funkcja $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, że $F^{(n)} = f$, czyli dowolna funkcja ciągła jest n–tą pochodną pewnej funkcji. Dowieść, że jeśli $F^{(n)} = G^{(n)}$ na przedziale I, to funkcja $F - G$ jest wielomianem stopnia mniejszego niż n.

8. Dowieść, że jeśli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale domkniętym $[a,b]$ i $f_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$, to $f_n \rightrightarrows f'$

9. Niech $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ dla $x > 1$. Udowodnić, że funkcja ζ jest dobrze zdefiniowana oraz, że jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.

10. Zbadać, dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n+x}$ jest zbieżny i znaleźć zbiór wszystkich punktów różniczkowalności jego sumy.

11. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = g(x)$, przy czym na każdym przedziale ograniczonym ta zbieżność jest jednostajna. Dowieść, że istnieje taka liczba c, że $f(c) = ce^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

12. Ile pochodnych ma funkcja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin(nx)$?

13. Niech $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x)$, jeśli $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ oraz $f_n(x) = 0$ dla pozostałych x z przedziału $[0,1]$. Dowieść, że szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i $\sum \sup\{f_n(x)\colon \quad x \in [0,1]\} = \infty$.

Oznacza to, że zbieżności jednostajnej tego szeregu nie można wywnioskować z kryterium Weierstrassa.