TWIERDZENIA O WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Następne twierdzenie, które udowodnimy, było używane przez Fermata (1601–1665) w odniesieniu do wielomianów jeszcze przed wprowadzeniem przez Newtona i Leibniza rachunku różniczkowego i całkowego. Fermat zajmował się znajdował między innymi znajdowaniem wartości największych i najmniejszych wielomianów na przedziałach domkniętych. Doprowadziło go to w gruncie rzeczy do pojęcia pochodnej, choć nie stworzył on teorii. Tym nie mniej odkrył twierdzenie, którego wagę trudno przecenić, choć zarówno twierdzenie jak i jego dowód są niesłychanie proste.

Twierdzenie 23.1 (Fermata o lokalnych ekstremach)
Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w pewnym punkcie $p \in (a,b)$ i przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą lub największą, to $f'(p) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie p wartość największą. Znaczy to, że dla każdego punktu x z dziedziny funkcji f zachodzi nierówność $f(x) \leqslant f(p)$, zatem dla $h > 0$ mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leqslant 0$ i wobec tego

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \leqslant 0\,.$$

Mamy też $f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \geqslant 0$. Obie te nierówności mogą zachodzić jednocześnie jedynie w przypadku $f'(p) = 0$. Jeśli f przyjmuje w punkcie p wartość najmniejszą, to funkcja $-f$ przyjmuje w tym punkcie wartość największą, więc $0 = (-f)'(p) = -f'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Wypada podkreślić, że jeśli funkcja określona na przedziale przyjmuje wartość największą w jego końcu, to nawet w przypadku, gdy jest w tym końcu jednostronnie różniczkowalna, to jej pochodna nie musi być równa 0. Funkcja x rozpatrywana na przedziale $[7,13]$ ma swą największą wartość w punkcie 13, w którym jej pochodną jest liczba 1.

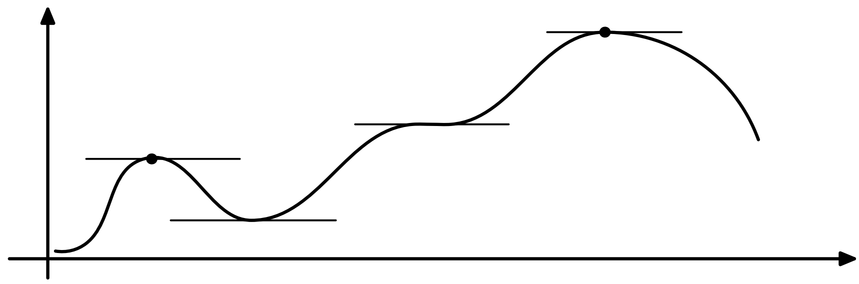
Uwaga 23.2 (o pozornej monotoniczności)
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $f'(p) > 0$, to istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $0 < h < \delta$ wynika nierówność $f(p-h) < f(p) < f(p+h)$, tzn. dostatecznie blisko punktu p, na lewo od niego wartości funkcji są mniejsze niż wartość punkcie p, zaś na prawo od tego punktu, w jego pobliżu wartości funkcji są większe niż wartość w punkcie p.

Dowód. Iloraz różnicowy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ jest dodatni dla dostatecznie małych h, bowiem ma dodatnią granicę przy $h \to 0$, zatem licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. ■

Twierdzenie 23.3 (Rolle'a)
Jeżeli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma pochodną we wszystkich jego punktach wewnętrznych oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$, taki że $f'(c) = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $f(a) = f(b)$ nie jest największą wartością funkcji f. Niech c będzie punktem, w którym funkcja f przyjmuje wartość największą spośród przyjmowanych na tym przedziale. Oczywiście $a < c < b$. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie c, więc na mocy twierdzenia Fermata zachodzi równość $f'(c) = 0$. Jeśli funkcja f nie przyjmuje wewnątrz przedziału $[a,b]$ wartości większych niż $f(a) = f(b)$, to albo przyjmuje mniejsze i możemy zamiast niej rozważyć funkcję przeciwną $-f$, albo funkcja f jest stała na przedziale $[a,b]$. W tym drugim przypadku c może być dowolnym punktem przedziału otwartego (a,b). Dowód został zakończony. ■

Interpretacja fizyczna tego twierdzenia może być np. taka: po prostoliniowej drodze porusza się pojazd, który rozpoczyna i kończy przemieszczanie się w tym samym punkcie $\big(f(a) = f(b)\big)$. Ponieważ kończymy podróż w punkcie startu, więc w którymś punkcie musieliśmy zawrócić, w momencie zmiany kierunku jazdy nasza prędkość była równa 0.



Na wykresie funkcji punkty, o których jest mowa w dowodzie twierdzenia Rolle'a to te w otoczeniu, których wykres wygląda tak, jak wykres funkcji $-x^2$ w otoczeniu punktu 0. Oczywiście to nie są jedyne punkty, w których pochodna przyjmuje wartość 0. Jeśli $f(x) = \sin^3 x$, to $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$, więc $f'(0) = 0$, chociaż w punkcie 0 funkcja f nie ma lokalnego maksimum ani lokalnego minimum. Jeśli $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, to funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale postaci $(-\delta, \delta)$. Ma ona lokalne ekstrema, ale w innych punktach, np. w punktach $\pm\frac{\pi}{2}$.

Przejdziemy teraz do najważniejszego twierdzenia w rachunku różniczkowym:

Twierdzenie 23.4 (Lagrange'a o wartości średniej)
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma pochodną we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b), to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że

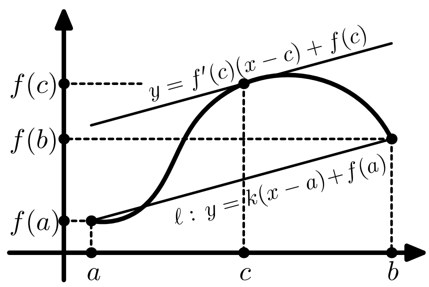
$$f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ — od funkcji f odejmujemy funkcję $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, więc liniową, której zmiana wartości na przedziale $[a,b]$ jest równa $f(b)-f(a)$, czyli jest równa zmianie wartości funkcji f na tym przedziale. Mamy więc $g(a) = f(a) = g(b)$. Funkcja g jest funkcja ciągła, jako różnica funkcji ciągłych. Taki sam argument przekonuje nas o istnieniu pochodnej g' we wszystkich punktach przedziału otwartego (a,b).

Funkcja g spełnia więc założenia twierdzenia Rolle'a. Istnieje wobec tego taki punkt $c \in (a,b)$, że $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, a to właśnie mieliśmy wykazać. ■

Czytelnik z pewnością zauważył, że twierdzenie Rolle'a jest przypadkiem szczególnym twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Geometrycznie twierdzenie to oznacza, że jeśli poprowadzimy prostą ℓ przez punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ wykresu funkcji f, to styczna do niego w **pewnym** punkcie $(c,f(c))$, leżącym między wybranymi punktami, jest równoległa do prostej ℓ. Twierdzenie Lagrange'a można też zinterpretować „fizycznie". Jeżeli $f(x)$ oznacza położenie w chwili x ciała poruszającego się po prostej,



$f'(c) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

to $f'(c)$ oznacza prędkość w chwili c, natomiast $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ to prędkość średnia w okresie od a do b. Według tej interpretacji twierdzenie o wartości średniej mówi, że prędkość chwilowa w pewnym momencie c równa jest prędkości średniej, co wygląda na stwierdzenie zupełnie oczywiste. Widzimy więc, że twierdzenie Lagrange'a ma krótki dowód, prosto można je zinterpretować na różne sposoby. Pokażemy, że ma ono liczne i ważne konsekwencje.

Twierdzenie 23.5 (o monotoniczności funkcji różniczkowalnej)
Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału P i że jest różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych. Przy tych założeniach funkcja f jest:

(23.5.1) niemalejąca ($x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest nieujemna,

(23.5.2) nierosnąca ($x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$) wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niedodatnia.

Dowód. Jeżeli funkcja f jest niemalejąca, to iloraz różnicowy $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest nieujemny, bo licznik i mianownik tego ułamka mają taki sam znak. Jeśli funkcja nieujemna ma granicę, to nieujemną. Z tego zdania wynika od razu, że pochodna we wszystkich tych punktach przedziału P, w których istnieje, jest nieujemna. Załóżmy teraz, że pochodna w punktach wewnętrznych przedziału P jest nieujemna. Załóżmy, że $x, y \in P$ i że $x < y$. Z twierdzenia o wartości średniej zastosowanego do przedziału $[x, y]$ wynika, że $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) \geqslant 0$ dla pewnego punktu $z \in (x, y)$. Ponieważ mianownik ułamka $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ jest dodatni, a sam ułamek jest nieujemny, więc licznik tego ułamka, czyli różnica $f(y) - f(x)$, też jest nieujemny, zatem $f(y) \geqslant f(x)$, co dowodzi tego, że funkcja f jest niemalejąca. Drugi przypadek sprowadzamy jak zwykle do pierwszego zastępując funkcję f funkcją przeciwną $-f$. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.6 (o stałości funkcji różniczkowalnej) [23.1]
Funkcja ciągła na przedziale P, różniczkowalna we wszystkich jego punktach wewnętrznych jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) = 0$ dla każdego punktu wewnętrznego przedziału P.

Dowód. Funkcja stała jest jednocześnie niemalejąca i nierosnąca, zatem jej pochodna jest jednocześnie nieujemna i niedodatnia, czyli zerowa. Jeśli pochodna jest zerowa, czyli jednocześnie nieujemna i niedodatnia, to funkcja jest zarówno niemalejąca, jak i nierosnąca, więc jest stała. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.7 (o pochodnej funkcji niemalejącej)
Jeśli funkcja niemalejąca f ma pochodną w pewnym punkcie x, to $f'(x) \geqslant 0$. ■

[23.1] Można z łatwością ten wniosek udowodnić bezpośrednio, bez powoływania się na właśnie wykazane twierdzenie.

Twierdzenie 23.8 (**o ścisłej monotoniczności funkcji różniczk.**) Niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału P. W tej sytuacji funkcja f jest:

(23.8.1) ściśle rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna i między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się taki punkt x, że $f'(x) > 0$,

(4.13.2) ściśle malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest niedodatnia i między każdymi dwoma punktami przedziału P znajduje się taki punkt x, że $f'(x) < 0$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja f jest ściśle rosnąca. Jest więc również niemalejąca, więc na podstawie poprzedniego twierdzenia jej pochodna jest nieujemna. Jeżeli $x, y \in P$ i $x < y$, to w pewnym punkcie wewnętrznym z przedziału $[x, y]$ zachodzi równość $f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$ (wynika to z twierdzenia Lagrange'a).

Zajmiemy się dowodem implikacji przeciwnej. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, której pochodna jest nieujemna, więc na mocy poprzedniego twierdzenia f jest funkcją niemalejącą. Jeśli nie jest ona ściśle rosnąca, to istnieją takie punkty $x, y \in P$, że $x < y$ i $f(x) = f(y)$. Jeśli $x < z < y$, to $f(x) \leqslant f(z) \leqslant f(y) = f(x)$, co oznacza, że $f(x) = f(z)$. Oznacza to, że f jest funkcją stałą na przedziale $[x, y]$, więc $f'(z) = 0$ dla każdego punktu $z \in [x, y]$, wbrew założeniu.

Druga część twierdzenia może być uzyskana z pierwszej przez rozważenie funkcji $-f$ zamiast funkcji f. ■

Twierdzenie 23.9 (**o lipschitzowskości funkcji różniczkowalnej**) Niech $f\colon P \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału P i różniczkowalną w każdym jego punkcie wewnętrznym. Wtedy funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L \geqslant 0$, tzn.

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \text{ gdy } x, y \in P,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $L \geqslant \sup\{|f'(t)|:\quad t \in \mathrm{int}P\}$.[23.9]

Dowód. Jeśli $x, y \in P$, to na mocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje taki punkt z leżący między x i y, że

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x-y)| \leqslant \sup\{|f'(t)|:\quad t \in \mathrm{int}P\} \cdot |x-y|,$$

co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

Dowód w drugą stronę wynika natychmiast z tego, że jeśli funkcja spełnia warunek Lipschitza ze stałą L, to dla dowolnych $x, y \in P$ zachodzi nierówność $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant L$. Z niej wynika, że $|f'(x)| = \lim\limits_{y \to x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant L$, więc $\sup\{|f'(t)|:\quad t \in \mathrm{int}P\} \leqslant L$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 23.10 (Darboux)

Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie przedziału (a,b) pochodną (być może nieskończoną) i jest ciągła, to funkcja $f'\colon P \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ma własność Darboux. Oznacza to, że jeśli $f'(x) < C < f'(y)$ dla pewnych $x, y \in (a,b)$ i $C \in \mathbb{R}$, to między x i y znajdzie się taka liczba c, że $C = f'(c)$.

Dowód. Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że $a < x < y < b$ oraz $f'(x) < C < f'(y)$. Niech $g(t) = f(t) - Ct$ dla $t \in (a,b)$. Funkcja g ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b) i zachodzi wzór $g'(t) = f'(t) - C$. Funkcja g jest też ciągła. Wystarczy udowodnić, że dla pewnego $c \in (x,y)$ zachodzi równość $g'(c) = 0$. Prawdziwe są wzory $g'(x) = f'(x) - C < 0 < f'(y) - C = g'(y)$. Ponieważ $g'(x) < 0$, więc istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeśli $0 < h < \delta$, to $g(x+h) < g(x)$. Ponieważ $g'(y) > 0$, więc istnieje taka liczba $\delta_y > 0$, że jeśli $0 < h < \delta$, to $g(y-h) < g(y)$. Stąd wynika, że żadna z liczb $g(x)$, $g(y)$ nie jest najmniejszą wartością funkcji g na przedziale $[x,y]$. Niech $c \in (x,y)$ będzie punktem, w którym g przyjmuje najmniejszą wartość na przedziale $[x,y]$ —

[23.9] $\mathrm{int}\,P$ oznacza zbiór wszystkich punktów wewnętrznych przedziału P, tzn. przedział otwarty, którego końce pokrywają się z końcami przedziału P.

istnienie c wynika z ciągłości g. Wtedy $g'(c) = 0$, a to chcieliśmy dowieść. ■

Przykład 23.1 Zajmiemy się funkcją arctg. Zachodzi równość $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Wobec tego dla $x \in (-1,1)$ mamy

$$(\operatorname{arctg})' = \tfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}-\tfrac{x^7}{7}+\cdots\right)'.$$

Z kryterium Leibniza wynika, że szereg $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jest zbieżny również dla $x = \pm 1$, przy czym nie jest to zbieżność bezwzględna. Z uwagi po kryterium Leibniza wynika, że

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{n=0}^{n-1}(-1)^j \frac{|x|^{2j+1}}{2j+1}x^{2j+1}\Big| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2+1} \leqslant \frac{1}{2n+1}$$

Z tej nierówności wynika jednostajna zbieżność szeregu na całym przedziale $[-1,1]$. Funkcja $\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jest więc ciągła na przedziale $[-1,1]$ a jej pochodna jest równa 0 w punktach wewnętrznych tego przedziału. Stąd wynika, że ta funkcja jest stała na przedziale $[-1,1]$. Dla każdej liczby $x \in [-1,1]$ zachodzi więc równość:

$$\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} 0 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \tfrac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0\,.$$

Stąd wynika, że równość $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ zachodzi dla każdego $x \in [-1,1]$. Podstawiając $x = 1$ do otrzymanego wzoru otrzymujemy

$$\tfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{1}{2n+1}$$

— ta równość nazywana jest zwykle wzorem Leibniza. Można wykazać, że jeśli chcielibyśmy za pomocą tego wzoru znajdować przybliżenia dziesiętne liczby π, to musielibyśmy wykonać wiele obliczeń, co nawet w przypadku komputerów ma istotne znaczenie – konkretnie: dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność podwójna $\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} + \dots < \frac{1}{4n}$ (nie jest ona oczywista!), więc błąd, który popełniamy przy zastępowaniu liczby $\frac{\pi}{4}$ liczbą $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ jest zawarty między $\frac{1}{4(n+1)}$ oraz $\frac{1}{4n}$. Stosując wzór z lepiej dobranym x otrzymać można bez trudu szeregi „szybciej" zbieżne. [23.3] ■

Przykład 23.2 Znajdziemy najmniejszą i największą wartość funkcji $\frac{x}{1+x^2}$, którą zresztą umiemy znaleźć bez różniczkowania. Mamy $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Pochodna ta zeruje się jedynie w punktach -1 i 1, więc tylko w tych punktach funkcja może przyjmować najmniejszą lub największą wartość, teoretycznie może też nie przyjmować jej wcale. Najmniejszą wartością funkcji może być jedynie liczba $\frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}$, największą — $\frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Bez trudu stwierdzamy, że nierówność $\frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ jest równoważna temu, że $2x \leqslant 1 + x^2$, czyli $0 \leqslant (x-1)^2$, więc jest prawdziwa. Podobnie uzasadniamy nierówność $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2}$. ■

Przykład 23.3 Niech $f(x) = \frac{1}{x}$. Mamy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Funkcja ma więc ujemną pochodną w każdym punkcie swej dziedziny $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Mamy też $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$, wobec tego funkcja ta nie jest nierosnąca, tym bardziej nie jest malejąca. Przyczyną tego zjawiska jest to, że dziedzina tej funkcji **nie** jest przedziałem — malutka, raptem jednopunktowa dziureczka w dziedzinie, powoduje, że teza przestaje być prawdziwa! Na każdym **przedziale**, na którym jest zdefiniowana, funkcja ta jest ściśle malejąca. ■

Przykład 23.4 Niech $a \geqslant b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi.

[23.3] Można o tym przeczytać w „Rachunku różniczkowym i całkowym" G.M.Fichtenholza, t.2, rozdział XI, $ 8, punkt 410, książce wielokrotnie wznawianej przez PWN.

Niech P oznacza prostokąt, którego jeden bok ma długość a, a drugi — b. Z prostokąta P wycinamy cztery kwadraty o boku $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, zawierające cztery wierzchołki P w taki sposób, że pole P zmniejsza się o $4x^2$. Następnie zaginamy „wystające" części powstałego dwunastokąta (niewypukłego) tak, by powstało pudełko o wymiarach $a-2x$, $b-2x$, x. Dla jakiego x pojemność otrzymanego pudełka będzie największa?

Niech $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ będzie pojemnością pudełka. Funkcja V jest ciągła, a nawet różniczkowalna w każdym punkcie swej dziedziny. Z punktu widzenia pojemności pudełka dziedziną funkcji V jest przedział $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, ale można tę funkcję rozpatrywać na przedziale domkniętym $\left[0, \frac{b}{2}\right]$. Na przedziale $\left[0, \frac{b}{2}\right]$ funkcja V, jako ciągła, przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą. Ponieważ $V(0) = V\left(\frac{b}{2}\right) = 0$ i $V(x) > 0$ dla $x \in \left(0, \frac{b}{2}\right)$, więc najmniejsza wartość przyjmowana jest w końcach przedziału $\left[0, \frac{b}{2}\right]$, zaś największa – w pewnym punkcie wewnętrznym x_0 tego przedziału. Ponieważ funkcja V jest różniczkowalna w x_0, więc $V'(x_0) = 0$. Wystarczy zatem znaleźć w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ punkty, w których pochodna funkcji V jest równa 0 i wybrać z nich ten w którym V ma największą wartość — takie punkty są co najwyżej dwa, bo V jest wielomianem trzeciego stopnia, więc V' jest wielomianem kwadratowym.

$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$. Wiemy, że ten wielomian ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ (nie ma potrzeby sprawdzać, że jego wyróżnik jest dodatni, bo to wynika z istnienia x_0!). [23.4] Możemy teraz zastosować to samo rozumowanie do badania funkcji V na przedziale $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Wewnątrz tego przedziału funkcja V przyjmuje wartości ujemne, na końcach — zero.

[23.4] Drugi pierwiastek wielomianu V' też jest dodatni, bo iloczyn pierwiastków tego wielomianu jest równy $\frac{ab}{12}$, jest więc dodatni, zatem oba pierwiastki maja ten sam znak, ale z tego korzystać nie będziemy.

Wobec tego swą najmniejszą wartość na $\left[\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right]$ funkcja V przyjmuje wewnątrz przedziału i wobec tego jej pochodna V' przyjmuje wartość 0 w co najmniej jednym punkcie tego przedziału. Wynika z tego rozumowania, że w każdym z przedziałów $\left(0, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ pochodna V' funkcji V ma co najmniej jeden pierwiastek, a ponieważ V' ma dokładnie dwa pierwiastki, więc w każdym z wymienionych przedziałów ma dokładnie jeden pierwiastek. Tak się dzieje w przypadku $a > b$. Nieco inaczej jest, gdy $a = b$. Wtedy $V'\left(\frac{b}{2}\right) = 0$, co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem i wobec tego również w tym przypadku w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' może mieć co najwyżej jeden pierwiastek, więc ma dokładnie jeden. Udowodniliśmy w ten sposób, że w przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ funkcja V' ma dokładnie jeden pierwiastek x_0. Jest nim mniejszy z dwóch pierwiastków tej funkcji, a liczba $V(x_0)$ jest największą wartością funkcji V przyjmowaną na przedziale $\left(0, \frac{b}{2}\right)$. Oczywiście zachodzi równość $x_0 = \frac{4(a+b)-\sqrt{4^2(a+b)^2-4\cdot 12ab}}{2\cdot 12} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$. ■

Uwaga 23.11

W ostatnim przykładzie nie zajmowaliśmy się znakiem pochodnej V', bo nie było potrzeby ustalać na jakich przedziałach funkcja V rośnie, a na jakich maleje. Można było postąpić inaczej: stwierdzić, że na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' funkcji V jest dodatnia, więc V na tym przedziale rośnie, a na przedziale $\left(x_0, \frac{b}{2}\right)$ pochodna V' jest ujemna, więc na tym przedziale funkcja V maleje. Z naszego rozumowania to też wynika, bo na przedziale $(0, x_0)$ pochodna V' nie przyjmuje wartości 0, ma zatem ten sam znak we wszystkich punktach tego przedziału, zatem funkcja V jest na tym przedziale ściśle monotoniczna, nie może być malejąca, bo $V(x_0) > 0 = V(0)$, więc jest ściśle rosnąca, więc jej niezerująca się pochodna jest dodatnia. ■

Przykład 23.5 Znajdziemy maksimum objętości brył powstałych w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego o obwodzie 1 wokół jego przeciwprostokątnej.

Niech a, b, c oznaczają boki trójkąta, przy czym c oznacza przeciwprostokątną. Bryła, która powstaje w wyniku obrotu trójkąta wokół boku c to dwa stożki złączone podstawami. Promień tej wspólnej podstawy to wysokość trójkąta prostopadła do przeciwprostokątnej, więc równa $\frac{ab}{c}$ (bo pole trójkąta to $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$, gdzie h_c jest wysokością trójkąta prostopadłą do przeciwprostokątnej c). Suma wysokości tych stożków jest równa c, zatem sumą ich objętości jest $V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi(ab)^2}{3c}$.

Wiadomo, że $a^2 + b^2 = c^2$ i $a + b + c = 1$. Stąd wynika, że

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = (1-c)^2 - c^2 = 1 - 2c.$$

Zachodzi więc wzór $V = V(c) = \frac{\pi(1-2c)^2}{12c} = \frac{\pi}{12}\left(\frac{1}{c} - 4 + 4c\right)$. Obliczamy pochodną: $V'(c) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{1}{c^2} + 4\right)$. Stąd wnioskujemy z łatwością, że $V'(c) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = \pm\frac{1}{2}$, zatem kandydatami na punkt, w którym funkcja V przyjmuje swą największą wartość są $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$. Liczba c jest długością boku trójkąta, zatem jest dodatnia, więc nie może być równa $-\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ też nie wchodzi w grę, bo wtedy byłaby spełniona równość $a + b = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = c$, przecząca nierówności trójkąta. Oznacza to, że funkcja V jest ściśle monotoniczna na każdym przedziale zawartym w swej dziedzinie, zatem kresy, jeśli są przyjmowane, to w końcach przedziału. Musimy więc znaleźć dziedzinę funkcji V.

Liczby a, b, c mają być bokami trójkąta prostokątnego o obwodzie 1, więc muszą być dodatnimi rozwiązaniami układu równań: $a^2+b^2 = c^2$, $a+b = 1-c$. Jeśli $a, b, c > 0$ i $a^2+b^2 = c^2$, to $(a+b)^2 > a^2+b^2 = c^2$, zatem $a+b > c$ i oczywiście $a+c > c > b$ oraz $b + c > c > a$. Oznacza to, że z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, oczywiście prostokątny. Ten układ równań równoważny jest następującemu:

$$a + b = 1 - c, \qquad ab = \tfrac{(1-c)^2 - c^2}{2} = \tfrac{1}{2} - c\,.$$

Wobec tego liczby a i b to pierwiastki równania kwadratowego $t^2 - (1-c)t + \frac{1}{2} - c = 0$. Równanie to ma dodatnie pierwiastki dla dodatniego parametru c wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < c < \frac{1}{2}$ oraz $0 \leqslant \Delta = (1-c)^2 - 4(\frac{1}{2} - c) = -1 + 2c + c^2 = (c+1)^2 - 2$ czyli $\sqrt{2} - 1 \leqslant c < \frac{1}{2}$. Ponieważ $V\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, więc maksymalna wartość V jest równa $V\left(\sqrt{2} - 1\right)$ — oczywiście maksymalna na przedziale $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\right)$. Łatwo zauważyć, że dla $c = \sqrt{2} - 1$ otrzymujemy trójkąt równoramienny (bo $\Delta = 0$, więc pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - (1-c)x + \frac{1}{2} - c = 0$, czyli liczby a i b są równe). ■

Uwaga 23.12

Ten przykład powinien przekonać Czytelniów o konieczności zwracania uwagi na dziedzinę funkcji. Omawiałem to zadanie wielokrotnie na zajęciach. Jeszcze się nie zdarzyło, by uczniowie lub studenci chcieli potraktować objętość V jako np. funkcję zmiennej a. Gdyby tak się stało, byłoby $V = V(a) = \frac{\pi a^2 (1-2a)^2}{6(1-a)(1-2a+2a^2)}$ i maksimum osiągane byłoby w punkcie wewnętrznym dziedziny funkcji V, czyli przedziału $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, mianowicie w punkcie $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, zatem w punkcie zerowania się pochodnej funkcji V. Znacznie mniej byłoby kłopotu z dziedziną funkcji, za to więcej z obliczeniami. Czasem rozwiązujący nie potrafili wywnioskować monotoniczności funkcji. Wydawało im się, że popełnili błąd w obliczeniach: skoro w jakimś punkcie jest osiągane maksimum, to pochodna tam musi się zerować — zapominali więc o tym, że to twierdzenie mówi o punktach *wewnętrznych* dziedziny, końców nie dotyczy. ■

Przykład 23.6 Znajdziemy teraz kres górny iloczynu trzech liczb nieujemnych, których suma jest równa 3. Oznaczmy te liczby przez x, y, z. Mamy więc $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ oraz $x + y + z = 3$. Mamy znaleźć kres górny wyrażenia $xy(3 - x - y)$

zakładając, że $x, y \geqslant 0$ oraz $x+y \leqslant 3$. Niech $s = x+y \leqslant 3$. Chwilowo traktować będziemy wielkość s jako stałą. Przy ustalonym s nasze wyrażenie to $x(s-x)(3-s)$. Mamy znaleźć jego kres górny zakładając, że $0 \leqslant x \leqslant s$. Mamy więc do czynienia z funkcją kwadratową zmiennej x, której współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc przyjmuje ona swą wartość największą w środku odcinka, którego końcami są jej pierwiastki. W naszym przypadku tym punktem jest $x = \frac{1}{2}(0+s) = \frac{s}{2}$. Należy teraz znaleźć maksymalną wartość wyrażenia $(3-s)\frac{s^2}{4}$ na przedziale $[0,3]$. Mamy

$$\left((3-s)\frac{s^2}{4}\right)' = -\frac{s^2}{4} + (3-s)\frac{s}{2} = \frac{3}{2}s - \frac{3}{4}s^2 = \frac{3}{4}s(2-s).$$

Ponieważ funkcja $(3-s)\frac{s^2}{4}$ zmiennej s jest ciągła na przedziale domkniętym $[0,3]$, więc osiąga w jakimś punkcie swój kres górny. Ponieważ w końcach przedziału przyjmuje wartość 0, a wewnątrz jest dodatnia, więc kres górny jest przyjmowany w jakimś punkcie wewnętrznym tego przedziału. Jedynym punktem w przedziale $(0,3)$, w którym pochodna funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ zeruje się, jest 2. Wartość funkcji $(3-s)\frac{s^2}{4}$ w tym punkcie równa jest 1. Odpowiednie wartości wyjściowych zmiennych to $x = y = z = 1$. Zadanie zostało rozwiązane. ■

Uwaga 23.13

Pokażemy teraz inne rozwiązanie problemu rozważanego w ostatnim przykładzie. Przypomnijmy, że $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$ — to nierówność o średniej arytmetycznej i geometrycznej. Staje się ona równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$. W naszym przypadku oznacza to, że $\sqrt[3]{xyz} \leqslant 1$, przy czym nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z = 1$. Wobec tego największa wartością iloczynu trzech liczb nieujemnych, których suma jest równa 3 jest liczba 1. Drugie rozwiązanie jest krótsze, ale wymaga pewnego pomysłu. ■

Przykład 23.7 Znajdziemy trójkąt o największym obwodzie wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1.

Zgodnie z twierdzeniem sinusów boki trójkąta są równe $2\sin\alpha$, $2\sin\beta$, $2\sin\gamma$, gdzie α, β i γ są kątami trójkąta. Połowa obwodu to $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$. Wiemy też, że $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Z wzorów redukcyjnych wynika, że połowa obwodu jest równa

$$P(\alpha,\beta) := \sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Trzeba znaleźć największą wartość funkcji P, o ile istnieje, na zbiorze $\{(\alpha,\beta)\colon\quad 0<\alpha,\beta \text{ i } \alpha+\beta<\pi\}$. Zaczniemy od rozwiązania zadania przy **ustalonym** kącie β. Zdefiniujmy funkcję pomocniczą: $f_\beta(\alpha)=P(\alpha,\beta)$. Mamy

$$f'_\beta(\alpha)=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)=2\cos(\alpha+\tfrac{\beta}{2})\cos\tfrac{\beta}{2}\,.$$

Kąty α, β spełniają nierówność $0<\alpha+\frac{\beta}{2}<\pi$. Wobec tego jedynym punktem zerowania się pochodnej funkcji f_β jest $\alpha=\frac{\pi-\beta}{2}$. Na przedziale $\big(0,\frac{\pi-\beta}{2}\big)$ pochodna funkcji f_β jest dodatnia, więc funkcja f_β jest ściśle rosnąca na przedziale $\big(0,\frac{\pi-\beta}{2}\big]$, więc jej największą wartością na **tym** przedziale jest liczba $f_\beta\big(\frac{\pi-\beta}{2}\big)$. Na przedziale $\big(\frac{\pi-\beta}{2},\pi-\beta\big)$ pochodna jest ujemna, więc funkcja f_β jest ściśle malejąca na przedziale $\big[\frac{\pi-\beta}{2},\pi-\beta\big)$, więc na tym przedziale jej największą wartością też jest liczba:

$$f_\beta\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)=\sin\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)+\sin\beta+\sin\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}+\beta\big)=2\cos\tfrac{\beta}{2}+\sin\beta\,.$$

Znajdziemy największą wartość tej funkcji na przedziale $(0,\pi)$. Mamy

$$\big(2\cos\tfrac{\beta}{2}+\sin\beta\big)'=-\sin\tfrac{\beta}{2}+\cos\beta=\cos\beta-\cos\big(\tfrac{\pi-\beta}{2}\big)\,.$$

Ponieważ na przedziale $(0,\pi)$ kosinus maleje, więc pochodna naszej funkcji zeruje się jedynie w takim punkcie β, że $\beta=\frac{\pi-\beta}{2}$, tzn. gdy $\beta=\frac{\pi}{3}$, przy czym pochodna, czyli $-\sin\frac{\beta}{2}+\cos\beta$, maleje na przedziale $(0,\pi)$, więc jest dodatnia na przedziale $\big(0,\frac{\pi}{3}\big)$ i ujemna na przedziale $\big(\frac{\pi}{3},\pi\big)$, zatem funkcja rośnie na przedziale $\big(0,\frac{\pi}{3}\big]$, a na przedziale $\big[\frac{\pi}{3},\pi\big)$ — maleje. Stąd wynika, że jej wartość w punkcie $\frac{\pi}{3}$ jest największa. Wtedy również $\alpha=\frac{\pi}{3}$ i siłą rzeczy

$\gamma = \frac{\pi}{3}$, zatem największy obwód spośród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 ma trójkąt równoboczny. ■

Uwaga 23.14

Podobnie jak w innych przypadkach można zadanie rozwiązać krócej. Na przedziale $(0,\pi)$ sinus jest funkcją wklęsłą. Z nierówności Jensena wynika, że

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 3\big(\tfrac13\sin\alpha+\tfrac13\sin\beta+\tfrac13\sin\gamma\big)\leqslant \\ \leqslant 3\sin\left(\tfrac13\alpha+\tfrac13\beta+\tfrac13\gamma\right) = 3\sin\tfrac{\pi}{3}\,,$$

czyli że połowa obwodu dowolnego trójkąta jest mniejsza niż połowa obwodu trójkąta równobocznego. ■

Przykład 23.8 Wykażmy, że najmniejsza wartość wielomianu $f(x)=x^6+6x^2+12x$ jest niewymierna. Zacznijmy od stwierdzenia, że ten wielomian ma najmniejszą wartość. Jeśli $|x|>2$, to $f(x) = x^6+6x^2+12x > 6x^2+12x \geqslant 6|x|(|x|-2) \geqslant 0$, a na przedziale domkniętym $[-2,2]$ przyjmuje najmniejszą wartość, jako funkcja ciągła, w pewnym punkcie c i $f(c)\leqslant f(0)=0$, więc $f(c)\leqslant f(x)$ dla **każdego** $x\in\mathbb{R}$.

Wynika stąd, że $0=f'(c)=6c^5+12c+12=6(c^5+2c+2)$. Tego wielomianu nie można przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia niższego o współczynnikach całkowitych (łatwe), więc również wymiernych (lemat Gaussa). Zachodzi wzór

$$f(c)=c^6+6c^2+12c=c(c^5+2c+2)+4c^2+10c=4c^2+10c\,.$$

Gdyby liczba $f(c)$ była wymierna, to liczba c byłaby pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $x^2+10x-f(c)$ o współczynnikach wymiernych. Dzieląc wielomian x^5+2x+2 przez $x^2+10x-f(c)$ otrzymujemy wzór

$$x^5+2x+2=Q(x)\big(x^2+10x-f(c)\big)+R(x)\,,$$

gdzie Q jest pewnym wielomianem stopnia trzeciego o współczynnikach wymiernych, a R — wielomianem stopnia pierwszego lub zerowego o współczynnikach wymiernych ($R\neq 0$, bo wielomian

x^5+2x+2 nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach wymiernych). Stąd jednak wynika, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu R, więc jest wymierna, wbrew temu, co o niej wiemy.

Dodajmy jeszcze, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem wielomianu kwadratowego o współczynnikach wymiernych, bo wtedy liczba c byłaby pierwiastkiem wielomianu czwartego stopnia o współczynnikach wymiernych. Szczegóły tego rozumowania zostawiamy Czytelnikowi. Czytelnik może też udowodnić, że liczba $f(c)$ nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu stopnia trzeciego lub czwartego o współczynnikach wymiernych. ■

Przykład 23.9 Człowiek spacerujący po lesie znajduje się w odległości 5 km od bardzo długiej prostoliniowej drogi i o 13 km od domu, który stoi przy drodze. Idąc lasem człowiek może przejść 3 km w ciągu godziny, a szosą — 5 km. Chce jak najszybciej dojść do domu. Jak powinien zaplanować marszrutę?

Rozwiążemy to zadanie. Oznaczmy przez C punkt, w którym znajduje się człowiek, a punkt, w którym znajduje się dom — literą D. Na prostej ℓ, którą jest droga, wybieramy punkt O, kierunek dodatni i odcinek jednostkowy w taki sposób, by punkt O był rzutem prostopadłym punktu C na prostą ℓ i żeby współrzędną punktu D była liczba $12=\sqrt{13^2-5^2}$. Załóżmy, że człowiek najpierw dochodzi do punktu na drodze, którego współrzędną jest liczba x, a potem idzie drogą do domu. Z tych założeń wynika, że czas przejścia $t(x)$ jest równy $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+25}+\frac{1}{5}|12-x|$. Ta funkcja jest ciągła. Jest różniczkowalna wszędzie z wyjątkiem punktu 12. Dla $x\neq 12$ mamy $t'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}+\frac{|x-12|}{5(x-12)}$. Dla $x>12$ zachodzi nierówność $t'(x)>0$, zatem funkcja jest ściśle rosnąca na półprostej $[12,\infty)$. Jeśli $x<12$, to $t'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+25}}-\frac{1}{5}$. Jasne jest, że $t'(x)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x<12$ i $\frac{x^2}{9(x^2+25)}=\frac{1}{25}$, czyli gdy $16x^2=225$, tzn. $x=\frac{15}{4}$. Łatwo przekonujemy się o tym, że jeśli $x < \frac{15}{4}$, to $t'(x) < 0$, zaś jeśli $\frac{15}{4} < x < 12$, to $t'(x) > 0$. Wynika stąd, że funkcja $t(x)$ maleje na półprostej $\big(-\infty, \frac{15}{4}\big]$ i rośnie na przedziale $\big[\frac{15}{4}, 12\big]$. Wobec tego jej najmniejszą wartością jest liczba $t\big(\frac{15}{4}\big) = \frac{56}{15}$. ■

Przykład 23.10 Niech $f(x) = \sin x - \big(x - \frac{x^3}{6}\big)$. Mamy $f'(x) = = \cos x - \big(1 - \frac{x^2}{2}\big)$, więc $(f')'(x) = -\sin x + x$. Udowodniliśmy poprzednio, że jeśli $x > 0$, to $\sin x < x$. Z tej nierówności wynika, że $(f')'(x) > 0$ dla każdego $x > 0$. Wobec tego funkcja f' jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0, \infty)$. Stąd wynika, że wzór $f'(x) > f'(0) = \cos 0 - \big(1 - \frac{0^2}{2}\big) = 0$ zachodzi dla każdego $x > 0$. Wobec tego funkcja f, której pochodna jest dodatnia na półprostej otwartej $(0, \infty)$, jest ściśle rosnąca na półprostej domkniętej $[0, \infty)$, więc nierówność $f(x) > f(0) = 0$ zachodzi dla $x > 0$. W ten sposób wykazaliśmy, że $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ dla każdej liczby $x > 0$. ■

Przykład 23.11 Niech $f(x) = e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$. Wtedy $f'(x) = e^x - (1 + x) \geqslant 0$. Wynika stąd, że $(f')'(x) = e^x - 1 > 0$, dla $x > 0$ oraz $(f')'(x) = e^x - 1 < 0$ dla $x < 0$. Funkcja f' jest więc ściśle rosnąca na półprostej $[0, \infty)$ oraz ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, 0]$ i dlatego najmniejszą wartością funkcji f' jest liczba $f'(0) = e^0 - 1 = 0$. Oznacza to, że dla $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$, czyli $e^x > 1 + x$. Wobec tego, że funkcja f' przyjmuje wartości dodatnie na całej prostej z wyjątkiem jednego punktu, zatem funkcja f jest ściśle rosnąca na całej prostej. Mamy więc $f(x) > f(0) = e^0 - (1 + 0 + \frac{1}{2}0^2) = 0$ dla $x > 0$ oraz $f(x) < f(0) = 0$ dla $x < 0$, zatem dla $x > 0$ zachodzi nierówność $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, zaś dla $x < 0$ — nierówność $e^x < 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Rozumując w ten sam sposób można wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$, przy czym nierówność jest ostra dla $x \neq 0$. Uogólnienie pozostawiamy czytelnikom w charakterze prostego ćwiczenia. Zachęcamy też do porównania z rozumowaniami przeprowadzanymi wcześniej: bez trudu można zauważyć, że uzyskujemy teraz z łatwością nierówności, których wykazanie bez pochodnych było dosyć trudne. ■

W poprzednich rozdziałach pojawiały się od czasu do czasu funkcje wypukłe i wklęsłe. Pokazaliśmy jak można dowodzić, że funkcja ciągła jest wypukła. Teraz pokażemy, jak można to robić w przypadku funkcji różniczkowalnej. Powiążemy też wyraźnie pojęcie wypukłości funkcji z pojęciem stycznej do jej wykresu. Przypomnijmy, że wypukłą nazywaliśmy taką funkcję określoną na zbiorze wypukłym (jedynymi wypukłymi podzbiorami prostej są przedziały, zbiory jednopunktowe oraz zbiór pusty), że dla dowolnych punktów x, y z jej dziedziny i dowolnej liczby $f \in (0,1)$ zachodzi nierówność $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$, co oznacza, że punkty odcinka o końcach $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ leżą *nad* wykresem funkcji f lub na tym wykresie, niezależnie od wyboru punktów x i y. Przypomniana właśnie definicja jest równoważna temu, że spełniony jest jeden (którykolwiek) z trzech warunków:

(a) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(b) $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$,

(c) $\frac{f(x)-f(z)}{x-z} < \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ dla dowolnych x, y, z z dziedziny funkcji f, dla których $x < y < z$.

Udowodnimy teraz twierdzenie charakteryzujące funkcje wypukłe w terminach pochodnych. Najpierw przypomnimy zwykłe oznaczenia dla jednostronnych pochodnych w punkcie x:

$f'_-(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ to *lewostronna pochodna* funkcji f

oraz

$f'_+(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ to *pochodna prawostronna.*

Twierdzenie 23.15 (o pochodnej funkcji wypukłej)
Jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to

W1. w każdym punkcie $x \in (a,b)$ istnieją pochodne jednostronne $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$ oraz $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$;

W2. jeśli $x, y \in (a,b)$ i $x < y$, to $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$, przy czym jeśli f jest ściśle wypukła, to nierówność jest ostra;

W3. funkcja f jest ciągła w każdym punkcie $x \in (a,b)$.

Dowód. Niech $D_x(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ dla dowolnego $t \in (a,b) \setminus \{x\}$, $D_x(t)$ oznacza iloraz różnicowy funkcji f w punkcie x. Załóżmy, że $u < v < x < r < s$ są punktami przedziału (a,b). Z własności (c) wynika, że $D_x(u) \leqslant D_x(v)$. Z własności (b) wynika z kolei, że $D_x(v) \leqslant D_x(r)$, zaś z własności (a) wynika, że $D_x(r) \leqslant D_x(s)$. Mamy więc

$$D_x(u) \leqslant D_x(v) \leqslant D_x(r) \leqslant D_x(s),$$

zatem funkcja D_x jest niemalejąca w całym zbiorze $(a,b) \setminus \{x\}$. Ma więc granice jednostronne w każdym punkcie przedziału (a,b), w tym w punkcie x. Stąd mamy równości: $\lim\limits_{t\to x^-} D_x(t) = f'_-(x)$ oraz $\lim\limits_{t\to x^+} D_x(t) = f'_+(x)$, przy czym $f'_-(x) \leqslant D_x(r)$, i wobec tego $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$. Pierwsza część twierdzenia została udowodniona.
Niech $x < r < y$. Z własności (b) wynika, że $D_x(r) \leqslant D_y(r)$, a z tego co udowodniliśmy dotychczas wynika, że $f'_+(x) \leqslant D_x(r)$ oraz $D_y(r) \leqslant f'_-(y)$. Z trzech otrzymanych nierówności wynika, że $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$. Uzyskaliśmy więc drugą część tezy.
Z istnienia jednostronnych pochodnych *skończonych* w punkcie x wynika, że funkcja f jest w tym punkcie lewo– i prawostronnie ciągła, więc jest ciągła. Stwierdzenie tego, że w przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności stają się ostre, wynika od razu z tego, że w przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności w (a), (b), (c) są ostre. Dowód został zakończony. ■

Wniosek 23.16 (z dowodu twierdzenia)
Jeśli f jest funkcją wypukłą określoną na przedziale otwartym (a, b), to dla dowolnego $h > 0$, takiego że $x + h \in (a, b)$ zachodzi nierówność $f(x+h) \geqslant f(x) + f'_+(x)h$. Jeśli $x - h \in (a, b)$, to zachodzi nierówność $f(x-h) \geqslant f(x) - f'_-(x)h$. W przypadku funkcji ściśle wypukłej nierówności te są ostre.

Dowód. Wynika to z tego, że $f'_+(x) \leqslant D_x(x+h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ w pierwszym przypadku i $f'_-(x) \geqslant D_x(x-h) = \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ w drugim przypadku. ■

Wykazane twierdzenie oznacza, że pochodna różniczkowalnej funkcji wypukłej jest niemalejąca. Wniosek to po prostu stwierdzenie, że wykres funkcji wypukłej leży nad styczną do siebie w dowolnym punkcie wewnętrznym przedziału–dziedziny. Przy okazji okazuje się, że funkcja wypukła może być nieróżniczkowalna w pewnych punktach, np. $|x|$, $|x+1| + |x| + |x-1|$ lub $e^{|x|}$, ale w punktach wewnętrznych dziedziny ma skończone pochodne jednostronne, więc jest ,,niedaleka" od funkcji różniczkowalnej. Wypada dodać, że te uwagi nie dotyczą końców przedziału–dziedziny, w których funkcja wypukła może nie być ciągła, np. jeśli $f(x) = x^2$ dla $x > 0$ i $f(0) = 1$, to f jest ściśle wypukła na półprostej domkniętej $[0, \infty)$, choć nie jest ciągła w punkcie 0, więc tym bardziej nie ma w tym punkcie pochodnej. Takimi funkcjami nie będziemy się jednak zajmować, bo skłonni jesteśmy przyznać, że są one nieco sztuczne.

Pojawiła się wielokrotnie nierówność $e^x > 1 + x$ dla $x \neq 0$. Teraz możemy ją wywnioskować ze ścisłej wypukłości funkcji e^x na przedziale $(-\infty, \infty)$. Nierówność $\sin x < x$ dla $0 < x < \pi$ jest konsekwencją ścisłej wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0, \pi]$. Jeśli $0 < x \neq 1$, to $\ln x < x - 1$, co wynika z tego, że funkcja ln jest ściśle wklęsła na $(0, \infty)$. Widzimy więc, że również w ten sposób można uzyskiwać różne oszacowania. Warto więc umieć wyjaśnić, czy funkcja na określonym przedziale jest wypukła, wklęsła, czy też ani wypukła, ani wklęsła. Okazuje się, że w wielu przypadkach można to wyjaśnić badając pochodną interesującej nas funkcji.

Twierdzenie 23.17 (o wypukłości funkcji różniczkowalnej) Jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w punktach przedziału (a,b) jednostronne pochodne f'_+ i f'_-, dla których zachodzą warunki:

23.17.1 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$,

23.17.2 jeśli $x < y$ i $x, y \in (a,b)$, to $f'_+(x) \leqslant f'_-(y)$,

to funkcja f jest wypukła na przedziale (a,b). Jeżeli nierówność w warunku 23.17.2 jest ostra, to funkcja f jest ściśle wypukła. W szczególności: *funkcja różniczkowalna f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest niemalejąca, ściśle wypukła — wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna f' jest ściśle rosnąca.*

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie dla funkcji różniczkowalnych, bo w tym przypadku dowód jest bardzo prosty. Z wypukłości funkcji wynika, że jej pochodna jest niemalejąca — jest to wniosek z poprzedniego twierdzenia.

Załóżmy więc, że funkcja f jest różniczkowalna, a jej pochodna f' jest niemalejąca: $x < y \Longrightarrow f'(x) \leqslant f'(y)$. By udowodnić, że funkcja f jest wypukła, wystarczy wykazać, że jeśli $x < y < z$, to $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że istnieją takie punkty $r \in (x,y)$ i $s \in (y,z)$, że $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(r)$ oraz $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(s)$. Ponieważ $r < y < s$, więc $r < s$ i wobec tego $f'(r) \leqslant f'(s)$, co kończy dowód twierdzenia w tym przypadku. ■

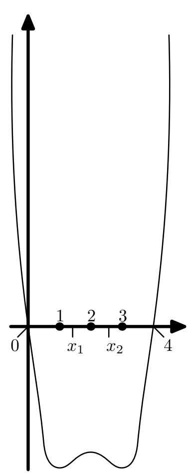
Dowód w przypadku ogólnym pozostawiam w charakterze ćwiczenia, bardzo zachęcam do przeprowadzenia go!

Przykład 23.12 Naszkicować wykres wielomianu w zdefiniowanego wzorem jak następuje: $w(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 12x$.

Wielomian w jest funkcją różniczkowalną na całej prostej i zachodzi równość

$$w'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = \\ = 2(x-1)(x-2)(x-3)\,.$$

Ta pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < x < 2$ lub $x > 3$. Wobec tego na półprostej $[3, \infty)$ wielomian w jest funkcją ściśle rosnącą, na przedziale $[2, 3]$ — ściśle malejącą, na przedziale $[1, 2]$ — ściśle rosnącą i wreszcie ściśle malejącą na półprostej $(-\infty, 1]$. Mamy $w(1) = -\frac{9}{2} = w(3)$ i $w(2) = -4$. Z tego, co do tej pory stwierdziliśmy wynika, że liczba $-\frac{9}{2}$ jest najmniejszą wartością funkcji w. Liczba -4 jest największą z wartości przyjmowanych np. na przedziale $(1, 3)$, ale to nie jest największa wartość wielomianu w, bo na przykład $w(0) = 0 > -4$. Największej wartości nie ma w ogóle, bowiem $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = \infty$. Zbadamy teraz monotoniczność pochodnej. Równość $0 = (w')'(x) = 6x^2 - 24x + 22 = 2(3x^2 - 12x + 11)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3}$ lub $x_2 = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Wynika stąd, że $(w')'(x) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3} < x < \frac{6+\sqrt{3}}{3} = x_2$.



W przedziale domkniętym $[x_1, x_2] = \left[\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \frac{6+\sqrt{3}}{3}\right]$ funkcja w' jest więc ściśle malejąca, zatem funkcja w jest ściśle wklęsła; na półprostej $\left(-\infty, x_1\right]$ funkcja w' jest ściśle rosnąca, więc funkcja w jest ściśle wypukła. Podobnie na półprostej $\left[x_2, \infty\right)$. ■

Definicja 23.18 (lokalnego ekstremum)

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze zawierającym przedział I o środku w punkcie p ma w tym punkcie lokalne maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki przedział $J \subset I$ o środku w punkcie p, że jeśli $x \in J$, to $f(x) \leqslant f(p)$. Jeśli nierówność jest ostra dla $x \neq p$, to mówimy, że lokalne maksimum jest właściwe. Analogicznie określamy lokalne minimum oraz lokalne minimum właściwe. Jeśli funkcja ma w punkcie p lokalne maksimum lub lokalne minimum, to mówimy, że ma w tym punkcie lokalne ekstremum [23.5] . ■

Wielomian $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ ma w punkcie 2 lokalne maksimum właściwe, a w punktach 1 i 3 lokalne minima właściwe.

Definicja 23.19 (punktu przegięcia)
Punkt p jest jest punktem przegięcia funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\delta > 0$, taka że:

23.19.1 przedział $(p-\delta, p+\delta)$ jest zawarty w dziedzinie f,

23.19.2 na jednym z przedziałów $(p-\delta, p]$, $[p, p+\delta)$ funkcja f jest wypukła, a na drugim wklęsła,

23.19.3 na żadnym z przedziałów $(p-\eta, p+\eta]$, $[p, p+\eta)$, gdzie $\eta \in (0, \delta)$, funkcja f nie jest liniowa. ■

Punktami przegięcia wielomianu $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ są liczby $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$. Liczba 0 jest punktem przegięcia każdej z funkcji x^3, x^5, x^7 ... Liczba $n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$ jest punktem przegięcia funkcji sinus oraz funkcji tangens.

Przykład 23.13 Niech $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-1}$. Zbadamy przebieg zmienności tej funkcji, czyli znajdziemy maksymalne przedziały, na których ta funkcja jest rosnąca, malejąca, wypukła, wklęsła. Potem będziemy mogli naszkicować jej wykres.

Mamy $f'(x) = \frac{(3x^2-4)(x^2-1)-2x(x^3-4x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4+x^2+4}{(x^2-1)^2} > 0$. Wynika stąd, że funkcja f jest ściśle rosnąca na przedziale $(-1, 1)$

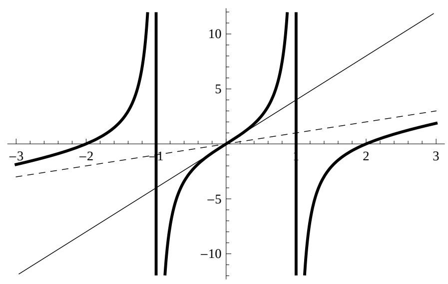
[23.5] W wielu podręcznikach słowa maksimum, minimum, ekstremum oznaczają lokalne maksimum, lokalne minimum, lokalne ekstremum. Zdecydowaliśmy się na nieco dłuższe terminy, by uniknąć częstych nieporozumień związanych z krótszymi, wielu osobom zdarza się mylić np. lokalne maksima z globalnymi, co może prowadzić do zupełnie bezsensownych wniosków.

i na każdej z półprostych $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$. Zachodzą równości $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\infty$ i wreszcie $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$.

Zajmiemy się wypukłością funkcji f. Ustalimy więc, gdzie funkcja f' rośnie lub maleje. Obliczymy pochodną $(f')'$ funkcji f'.

$$(f')'(x)=\frac{(4x^3+2x)(x^2-1)^2-4x(x^2-1)(x^4+x^2+4)}{(x^2-1)^4}=$$
$$=\frac{(4x^3+2x)(x^2-1)-4x(x^4+x^2+4)}{(x^2-1)^3}=\frac{-6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Wynika stąd, że $(f')'(x)>0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$, więc funkcja jest ściśle wypukła na półprostej $(-\infty,-1)$ oraz na przedziale $[0,1)$. Ponieważ $(f')'(x)<0 \iff \iff x\in(-1,0)\cup(1,\infty)$, więc funkcja f jest ściśle wklęsła na przedziale $(-1,0]$ oraz na półprostej $(1,\infty)$. Ta funkcja nie ma lokalnych ekstremów. Jej jedynym punktem przegięcia jest $x=0$. Dodajmy jeszcze, że $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-1}=-\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-1}=\infty$. Zachodzą też równości $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2-1}-x\right)=0$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x}{x^2-1}-x\right)=0$.



Na rysunku obok są: wykres funkcji $\frac{x^3-4x}{x^2-1}$; *proste* $x=-1$, $x=1$; *prosta* $y=4x$ *styczna do wykresu funkcji* f *w punkcie* $(0,0)$ *— linia ciągła; prosta* $y=x$ *– linia przerywana.*[23.6] ■

W ostatnim przykładzie pojawiła się proste, do której wykres funkcji zbliżał się nieograniczenie, mianowicie proste: $y=x$, $x=1$ i $x=-1$. Takie proste mają swą nazwę.

Definicja 23.20 (asymptoty)

Prosta $y=Ax+B$ jest asymptotą funkcji $f\colon(a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy $x\longrightarrow\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(Ax+B)\big)=0$. Prosta $y=Ax+B$ jest asymptotą funkcji $f\colon(a,-\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy

[23.6] Tym razem odcinki jednostkowe na osiach mają różne długości.

$x \longrightarrow -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(Ax+B)\big)=0$.

Prosta $x = c$ jest asymptotą (pionową) funkcji $f\colon(a,c)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy $x\to c^-$, $c\in\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$.
Prosta $x = c$, jest asymptotą (pionową) funkcji $f\colon(c,a)\longrightarrow\mathbb{R}$ przy $x\to c^+$, $c\in\mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$. ■

Często w przypadku asymptot przy $x\to\infty$ mówimy o asymptotach ukośnych, gdy $A\neq 0$ lub poziomych, gdy $A=0$.

Uwaga 23.21

Załóżmy, że prosta $y = Ax+B$ jest asymptotą funkcji f przy $x\longrightarrow\pm\infty$. Wtedy $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $B=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-Ax\big)$.
Pierwsza równość wynika z tego, że $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(Ax+B)\big)=0$, zatem
$0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-(Ax+B)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\big(\frac{f(x)}{x}-A\big)-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{B}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\big(\frac{f(x)}{x}-A\big)$.
Druga równość wynika z pierwszej. ■

Przykład 23.14 Niech $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ dla $x\notin(0,2]$. Zbadamy przebieg zmienności funkcji f.

Dla $x>2$ mamy $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x-2}}$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.
Mamy również

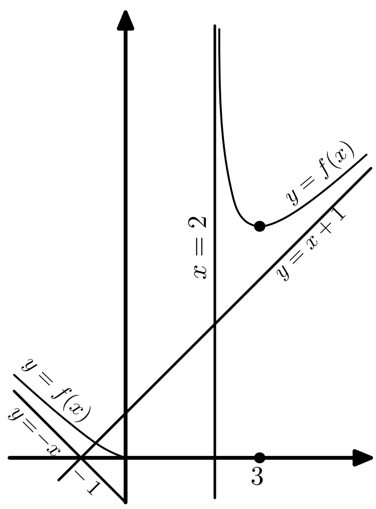
$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x}{x-2}}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}\cdot\left(\frac{x}{x-2}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-2}}+1}\cdot\frac{2x}{x-2}=\frac{1}{1+1}\cdot\frac{2}{1}=1.$$

Wynika stąd, że prosta o równaniu $y=x+1$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x\longrightarrow\infty$. W podobny sposób przekonać się możemy, że $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ i $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+x\big)=-1$, a to oznacza, że prosta o równaniu $y=-x-1$ jest asymptotą ukośną funkcji f przy $x\longrightarrow-\infty$. W punkcie 0 funkcja f jest ciągła. Mamy też $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\infty$, zatem prosta $x=2$ jest prawostronną asymptotą pionową funkcji f.

Na jakich przedziałach funkcja f rośnie, a na jakich maleje? Mamy

$$f'(x) = \left(\sqrt{\tfrac{x^3}{x-2}}\right)' = \left(\left(\tfrac{x^3}{x-2}\right)^{1/2}\right)' =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^3}{x-2}\right)^{-1/2} \cdot \tfrac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2} = \sqrt{\tfrac{x-2}{x^3}} \cdot \tfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2}\,.$$

Wynika stąd, że $f'(x) > 0$, gdy $x > 3$ i $f'(x) < 0$, gdy $x < 0$ oraz gdy $2 < x < 3$. Wobec tego funkcja f jest ściśle rosnąca na półprostej $[3,\infty)$, a na przedziale $(2,3]$ i na półprostej $(-\infty,0]$ jest ściśle malejąca (choć nie jest ściśle malejąca na zbiorze $(-\infty,0]\cup(2,3]$). Teraz zajmiemy się wypukłością i wklęsłością funkcji f na różnych przedziałach. Aby stwierdzić na jakich przedziałach f jest funkcją wypukłą, a na jakich wklęsłą, ustalimy, gdzie jej pochodna $f'\colon \mathbb{R}\setminus[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ rośnie, a gdzie maleje. Dla $x > 3$ zachodzi wzór $f'(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}}$, a dla $x \leqslant 3$ — równość $f'(x) = -\sqrt{\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}}$. Funkcja $\sqrt{y}$ jest ściśle rosnąca, więc wystarczy zbadać na jakich przedziałach funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ rośnie, a na jakich maleje.



Mianownik jej pochodnej jest dodatni, bo jest kwadratem, a licznik jest równy

$$\big((x-3)^2 + 2x(x-3)\big)(x-2)^3 - 3(x-2)^2\big(x(x-3)^2\big) =$$
$$= (x-3)(x-2)^2\big((3x-3)(x-2) - 3x(x-3)\big) = 6(x-3)(x-2)^2.$$

Funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ jest więc ściśle rosnąca na półprostej $[3,\infty)$. Na przedziale $(2,3]$ oraz na półprostej $(-\infty,0]$ funkcja $\frac{x(x-3)^2}{(x-2)^3}$ jest ściśle malejąca. Wobec tego na półprostej $[3,\infty)$, na przedziale $(2,3]$ i na półprostej $(-\infty,0]$ pochodna f' jest ściśle rosnąca, zatem funkcja f jest ściśle wypukła na każdej z dwu półprostych: $(2,\infty)$ i $(-\infty,0]$. ■

Po tych kilku przykładach wypada stwierdzić, że prezentowane metody są skuteczne, jeśli potrafimy znajdować pierwiastki funkcji. Daje się to robić w przypadku dosyć wąskiej klasy funkcji, za to tych używanych najczęściej. W innych sytuacjach stosujemy metody przybliżone.

Przykład 23.15 Pokażemy jak można znaleźć pierwiastek równania $x^5 + 2x + 2 = 0$ z dokładnością do 0,1. Oznaczmy: $f(x) = x^5 + 2x + 2$. Wtedy $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, więc funkcja f jest ściśle rosnąca, zatem ma co najwyżej jeden pierwiastek. Ponieważ $f(-1) = -1 < 0 < 2 = f(0)$, więc funkcja ciągła f ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(-1, 0)$. Wykazaliśmy, że funkcja f ma dokładnie jeden pierwiastek, który znajduje się w przedziale $(-1, 0)$. Mamy $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{32} - 1 + 2 = \frac{31}{32} > 0$, zatem ten pierwiastek znajduje się w przedziale $\big(-1, -\frac{1}{2}\big)$. Pochodna f' funkcji f jest ściśle malejąca na półprostej $(-\infty, 0]$, więc funkcja f jest na tej półprostej ściśle wklęsła, a zatem jej wykres leży pod styczną. Wobec tego możemy napisać, że

$$f(x) < f'(-1)(x+1) + f(-1) = 7(x+1) - 1 = 7x + 6$$

dla $x \in (-1, 0)$. Wobec tego $f(-\frac{6}{7}) < 0$. Z wklęsłości funkcji wynika, że odcinek łączący dwa punkty wykresu znajduje się pod tym wykresem, zatem

$$f(x) > \tfrac{f(-1/2) - f(-1)}{-1/2 - (-1)}(x+1) + f(-1) = \tfrac{63}{16}(x+1) - 1 = \tfrac{63}{16}x + \tfrac{47}{16}.$$

Wynika stąd, że $f(-\frac{47}{63}) > 0$. Wobec tego pierwiastek leży między liczbami $-\frac{6}{7}$ i $-\frac{47}{63}$. Mamy też $\frac{6}{7} - \frac{47}{63} = \frac{1}{9} < \frac{1}{5}$, zatem liczba $-\frac{1}{2}\big(\frac{6}{7} + \frac{47}{63}\big) = -\frac{101}{126}$ znajduje się w odległości mniejszej niż $\frac{1}{18} < \frac{1}{10}$ od pierwiastka funkcji f. ∎

Przykład 23.16 Znajdziemy przybliżenie (wymierne) liczby $\sqrt[3]{2}$ z błędem mniejszym niż 0,000 001. Ponieważ $1 < 2 < 8$, więc $1 < \sqrt[3]{2} < 2$. Liczba $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ to jedyny pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2$, który jest funkcją ściśle rosnącą. Z definicji pochodnej wynika od razu, że $x^3-2\approx 3a^2(x-a)+a^3-2$ dla x dostatecznie bliskich a. Można więc spróbować rozwiązać równanie $3a^2(x-a)+a^3-2=0$ zamiast równania $x^3-2=0$. Otrzymujemy $x=a-\frac{a^3-2}{3a^2}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}=\frac{1}{3}\left(a+a+\frac{2}{a^2}\right)$. Liczba $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}$ leży między liczbami a i $\frac{2}{a^2}$ (jako ich średnia ważona). Jeśli $a>0$, to $a>\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow\frac{2}{a^2}<\sqrt[3]{2}$. Wynika stąd, że jeśli zastąpimy liczbę a liczbą $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}$, to przesuniemy się w kierunku liczby $\sqrt[3]{2}$. Zauważmy, że

$$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}=\frac{1}{3}\left(a+a+\frac{2}{a^2}\right)\geqslant\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{2}{a^2}}=\sqrt[3]{2}$$

Okazało się, że dla każdej liczby $a>0$ spełniona jest nierówność $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}\geqslant\sqrt[3]{2}$. Jeśli $a>\sqrt[3]{2}$ to, $a>\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a^2}>\sqrt[3]{2}$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorami $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{a_n^2}$. Z wykazanych już nierówności wynika, że ten ciąg jest ściśle malejący i że wszystkie jego wyrazy są większe od $\sqrt[3]{2}$. Ma więc ma granicę skończoną. Niech $g=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, więc $g=\frac{2}{3}g+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{g^2}$, zatem $g^3=2$, więc $g=\sqrt[3]{2}$.

Oszacujemy różnicę między $g=\sqrt[3]{2}$ i a_n. Mamy
$0<a_{n+1}-\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{2}{a_n^2}\right)-\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3a_n^2}\left(2a_n^3-3a_n^2\sqrt[3]{2}+2\right)=$
$=\frac{1}{3a_n^2}\left(a_n-\sqrt[3]{2}\right)^2\left(2a_n+\sqrt[3]{2}\right)<\frac{1}{a_n}\left(a_n-\sqrt[3]{2}\right)^2$.
Wobec tego $a_2-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{a_1}\left(a_1-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{1}{2}\left(2-\sqrt[3]{2}\right)<\frac{1}{2}$. Dalej:

$$a_{n+2}-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{a_{n+1}}\left(a_{n+1}-\sqrt[3]{2}\right)^2<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(a_{n+1}-\sqrt[3]{2}\right)^2<$$
$$<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}\left(a_n-\sqrt[3]{2}\right)^4=\frac{1}{2}\left(a_n-\sqrt[3]{2}\right)^4.$$

Wobec tego $a_4-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{2}\left(a_2-\sqrt[3]{2}\right)^4<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$. Stąd mamy

$$a_6-\sqrt[3]{2}<\frac{1}{2}\left(a_4-\sqrt[3]{2}\right)^4<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{10}}<\frac{1}{2\,000\,000},$$

a więc wystarczy obliczyć szósty wyraz zdefiniowanego ciągu, by uzyskać żądane przybliżenie. Czytelnik sam przekona się jaką dokładność daje piąty wyraz tego ciągu. ■

Uwaga 23.22 Metodę opisaną w ostatnim przykładzie wymyślił

Isaac Newton. Jest ona bardzo skuteczna w przypadku różniczkowalnych funkcji wypukłych, ale nie tylko dla nich. Niedobrze działa w przypadku takich pierwiastków funkcji, w których jej pochodna jest równa 0, więc co najmniej dwukrotnych.

Metoda Newtona bywa modyfikowana. Jest szeroko stosowana m.in. w różnych urządzeniach elektronicznych służących do obliczania. W poprzednim przykładzie kombinowaliśmy różne metody. W dzisiejszych czasach obliczenia zazwyczaj wykonują komputery, ale jeśli mamy do czynienia z bardzo poważnymi obliczeniami, to komputer musi stosować rozsądne metody, bo inaczej przyjdzie nam czekać na wynik zbyt długo i narazimy się na niedokładne wyniki — komputery używają przybliżeń liczb (np. skończonych rozwinięć w układzie pozycyjnym o podstawie 16). ■

Zadania

1. Udowodnić, że liczba c jest 2–krotnym pierwiastkiem wielomianu w, czyli że wielomian w jest podzielny przez wielomian $(x-c)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = w(c) = w'(c)$.

2. Udowodnić, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorami $f(0) = 0$ i $f(x) = x + x^3(2+\sin\frac{1}{x})$ dla $x \neq 0$ nie jest ani wypukła ani wklęsła na żadnym przedziale, którego końcem jest liczba 0.

$x \in (0,1) \Rightarrow f(x) > x$, $x \in (-1,0) \Rightarrow f(x) < x$, *więc z lewej strony punktu* 0 *wykres leży pod styczną, a z prawej — nad nią, choć* 0 **nie** *jest punktem przegięcia funkcji* f.

3. Dowieść, że jeśli $a < b < c$, funkcja $f\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła i punkty $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ i $\big(c, f(c)\big)$ leżą na jednej prostej, to punkt $\big(x, f(x)\big)$ też leży na tej prostej dla każdego $x \in (a,c)$.

4. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech będzie spełniona nierówność $f(a) < 0 < f(b)$. Niech $a_0 = a$,

$a_1 = b$. Niech $(a_2, 0)$ będzie punktem, w którym prosta przechodząca przez punkty $\big(a, f(a)\big)$ i $\big(b, f(b)\big)$ przecina poziomą oś układu współrzędnych. Jeśli $f(a_2) = 0$, to przyjmujemy $a_n = a_2$ dla każdego $n \geqslant 2$. Jeżeli $f(a_2) < 0$, to a_3 jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia poziomej osi układu współrzędnych i prostej przechodzącej przez obydwa punkty $\big(a_2, f(a_2)\big)$ i $\big(a_1, f(a_1)\big)$. Jeśli $f(a_2) > 0$, to a_3 jest pierwszą współrzędną punktu przecięcia poziomej osi układu współrzędnych i prostej, która przechodzi przez punkty $\big(a_0, f(a_0)\big)$ i $\big(a_2, f(a_2)\big)$. Analogicznie określamy następne wyrazy ciągu (a_n). Dowieść, że ciąg (a_n) jest zbieżny i że $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

Uwaga. W zadaniu czwartym opisaliśmy jeszcze jedną metodę przybliżonego obliczania pierwiastków funkcji.

5. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która ma pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, to $f'(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a,b)$.

6. Niech funkcja $f\colon [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln x) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Niech $c(x)$ oznacza taką liczbę, że $f(x) - f(0) = xf'\big(c(x)\big)$ i $c(x) \in (0,x)$. Wykazać, że funkcja c ma punkty nieciągłości w każdym przedziale postaci $(0,d)$, $d > 0$.

7. Funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną w każdym punkcie przedziału (a,b). Czy wynika stąd, że dla każdej liczby $c \in (a,b)$ istnieją takie liczby $x, y \in [a,b]$, że $x < c < y$ i $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$?

8. Dowieść, że jeśli $p > 1$ i $0 < x < y$, to zachodzi nierówność

$$px^{p-1}(y-x) < y^p - x^p < py^{p-1}(y-x).$$

9. Dowieść, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ z tego, że $y \neq x$ wynika, że $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| < |x-y|$.

10. Dowieść, że nie istnieje taka liczba $L > 0$, że nierówność

$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \leqslant L|x-y|$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Dowieść, że jeśli $0 < x < y$, to $\frac{y-x}{y} < \ln\frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$.

12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ma ograniczoną pochodną, to jest jednostajnie ciągła.

13. Dowieść, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją nieograniczoną i różniczkowalną, to jej pochodna f' też jest nieograniczona.

14! Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, to $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

15. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to istnieje taki ciąg (x_n), którego granicą jest ∞, że $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

16! Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna w przedziale otwartym (a,b) i istnieje granica $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = A \in [-\infty, \infty]$, to funkcja f ma w punkcie a prawostronną pochodną i $f'_+(a) = A$.

17! Znaleźć wszystkie takie funkcje ciągłe $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in (a,b)$ zachodzi równość $f'(x) = 1$.

18. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f'(x) = 7f(x)$, to $f(x) = f(0)e^{7x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

19. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon (-1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(1+x)f'(x) = \sqrt{7}f(x)$, to $f(x) = f(0)(1+x)^{\sqrt{7}}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

20. Dowieść, że jeżeli $x < 1$, to zachodzi równość $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$, a dla $x > 1$ — $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arctg} x - \frac{3\pi}{4}$.

21. Dowieść, że jeżeli $|x| \geqslant 1$, to $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \frac{|x|}{x}$.

22. Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, ma ciągłą pochodną w przedziale (a,b), jej wykres nie jest zawarty w prostej. Dowieść, że $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| < |f'(c)|$ dla pewnego $c \in (a,b)$.

23. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja f jest monotoniczna, jeśli $f(x) =:$

(a) $\frac{\sqrt{x}}{x+100}\,,\ x \geqslant 0\,;$ (b) $x + \sin x\,,\ x \in \mathbb{R}\,;$

(c) $x\Big(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\Big)\,,\ x > 0\,;$ (d) $x + \sin(2x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,;$

(e) $\cos\frac{\pi}{x}\,,\ x \neq 0\,;$ (f) $x^2 2^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}\,;$

(g) $x^n e^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,;$ (h) $x^2 - \ln(x^2)\,,\ x \neq 0\,.$

24. Dowieść, że funkcja $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ jest ściśle rosnąca na każdej z półprostych $[1, \infty)$ i $(-\infty, -1]$.

25. Znaleźć maksimum objętości stożka wpisanego w kulę o promieniu 1.

26. Znaleźć minimum objętości stożka opisanego na kuli o promieniu 1.

27. Znaleźć maksimum obwodu trójkąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

28. Znaleźć maksimum długości statku, który może wpłynąć z kanału o szerokości $a > 0$ do prostopadłego doń kanału, którego szerokość jest równa $b > 0$.

29. Znaleźć maksimum pola trójkąta o obwodzie 3 - można skorzystać z wzoru Herona.

30. Znaleźć największy wyraz ciągu $\left(n^5 2^{-n}\right)$ dla $n = 1, 2, 3\ldots$ i największy wyraz ciągu $\left(n^5 3^{-n}\right)$ dla $n = 1, 2, 3\ldots$

31. Ciężarówka porusza się po autostradzie ze stałą prędkością v km/h. Minimalna prędkość dla ciężarówek na autostradzie wynosi 50 km/h, maksymalna 100 km/h, litr benzyny kosztuje 2 zł, kierowca otrzymuje 10 zł za godzinę swej pracy. Ciężarówka zużywa $11 + \frac{v^2}{400}$ litrów paliwa w ciągu godziny jazdy (z prędkością v). Przy jakiej prędkości koszt przejazdu ustalonego odcinka trasy jest najmniejszy?

32. Zbadano, że w pewnej fabryce robotnik rozpoczynający pracę o godzinie 8:00 wykonuje $-x^3 + 6x^2 + 15x$ radioodbiorników w ciągu x godzin. Po 15–minutowej przerwie wykonuje w ciągu x godzin $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radioodbiorników. O której powinna rozpocząć się 15–minutowa przerwa, aby do 12:15 wykonał najwięcej radioodbiorników, a której — by wykonał ich najmniej?

33. Statek pływa z portu A do portu B. Koszt ruchu statku składa się z dwu części: niezależnej od prędkości i równej 25600 zł dziennie oraz zależnej od prędkości i równej (liczbowo) podwojonemu sześcianowi prędkości dziennie. Przy jakiej prędkości koszt przepłynięcia trasy jest najmniejszy?

34. Niech $f(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln x$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ i na przedziale $\left[\frac{1}{8}, 2\right]$

35. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $e^{\sqrt{x^2 \cdot |x+1|}}$ na przedziale $[-2, 1]$.

36. Niech $f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji f na przedziale $[\pi, 2\pi]$.

37. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $2ex\ln x$ na przedziale $(0, 2]$.

38. Ile pierwiastków ma równanie $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$?

39. Ile pierwiastków ma równanie $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$?

40. Ile pierwiastków ma równanie $x^5 - 5x = a$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

41. Ile pierwiastków ma równanie $e^x = ax^2$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$?

42. Dowieść, że wielomian dodatniego stopnia jest funkcją ściśle monotoniczną na każdej z półprostych (a, ∞) i $(-\infty, a)$, jeśli tylko a jest dostatecznie duża liczbą dodatnią.

43. Udowodnić, że jeżeli obie funkcje f, g są różniczkowalne na półprostej $[a, \infty)$ i $|f'(x)| \leqslant g'(x)$ dla każdego $x \geqslant a$, to nierówność $|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a)$ zachodzi dla $x \geqslant a$.

44. Udowodnić, że jeśli $f\colon [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $f(a) < 0$ i dla pewnej liczby $c > 0$ nierówność $f'(x) > c > 0$ zachodzi dla $x > a$, to istnieje taka liczba $x_0 \in \big(a, a-\frac{f(a)}{c}\big)$, że $f(x_0) = 0$.

45. Dowieść, że jeżeli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że dla każdej liczby $x \in (a,b)$ istnieje taka liczba $\delta_x > 0$, że jeżeli $0 < |y-x| < \delta_x$, to $(y-x)\big(f(y)-f(x)\big) > 0$, to funkcja f jest ściśle rosnąca.

46. Dowieść, że założenie ciągłości funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ w twierdzeniu Lagrange'a o wartości średniej jest istotne nawet wtedy, gdy pochodna $f'(x)$ funkcji f jest skończona dla każdego $x \in (a,b)$.

47. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

48. Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ zachodzi nierówność
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\,.$$

49. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x\,.$$

50. Dowieść, że dla każdej liczby dodatniej x zachodzi nierówność
$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x\,.$$

51. Dowieść, że dla każdej liczby $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ zachodzi nierówność
$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}\,.$$

52. Dowieść, że jeśli $0 < a < b$ i $x, y > 0$, to zachodzi nierówność
$$(x^a + y^a)^{1/a} < (x^b + y^b)^{1/b}\,.$$

53. Dowieść, że jeśli $0 < x < \frac{\pi}{2}$, to $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$.

54. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $\big(1 + \frac{1}{x}\big)^x < e < \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{x+1}$.

55. Dowieść, że jeśli $x > 1$ i $p > 1$, to $x^p - 1 > p(x-1)$.

56. Dowieść, że jeśli $x > 0$, to $1 + 2\ln x \leqslant x^2$.

57. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja f jest wypukła lub wklęsła, jeśli $f(x)=$

(a) $3x^2-x^3$; (b) $\frac{8}{22+x^2}$;

(c) $x+x^{5/3}$; (d) $\sqrt{1+x^2}$;

(e) $x+\sin x$; (f) e^{-x^2};

(g) $\ln(1+x^2)$; (h) $x\sin(\ln x)$;

(i) x^x; (j) $\frac{x+1}{x^2+1}$;

(k) $x\ln x$; (l) $x\sin\frac{1}{x}$.

58. Znaleźć przedziały monotoniczności i wypukłości lub wklęsłości funkcji f, jej lokalne ekstrema i punkty przegięcia. Znaleźć granice funkcji f oraz granice funkcji f' w końcach przedziałów składających się na ich dziedziny (niekoniecznie takie same). Naszkicować wykres funkcji [23.6] f, jeśli $f(x)=$

a. $x^4(1+x)^{-3}$; b. $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

c. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$; d. $1-x+\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$;

e. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; f. $\sin x\,\sin 3x$;

g. $\frac{x^3-5x}{\left(\sqrt{5+x^2}\right)^3}$; h. $\sqrt[3]{x^4-2x^2}$;

i. $(x+1)^{5/3}\left(x^2+2x\right)^{1/3}$, wiedząc, że
$$f'(x)=\tfrac{1}{3}(x+1)^{2/3}\left(x^2+2x\right)^{-2/3}\left(7x^2+14x+2\right),$$
niewymiernymi pierwiastkami funkcji f' są $x_5\approx-1.845$ i $x_6\approx-0.155$, ma ona również pierwiastek wymierny, $f''(x)=\frac{2(14x^4+56x^3+61x^2+10x-4)}{9(x+1)^{1/3}(x^2+2x)^{5/3}}$, pierwiastkami drugiej pochodnej są cztery liczby niewymierne $x_1\approx 0.177$, $x_2\approx-2.177$, $x_3\approx-0.492$, $x_4\approx-1.508$;

j. $\sqrt[3]{\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-5}}$, wiedząc, że $f'(x)=\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-5)^4(x^2+2x-7)^2}}$,

[23.6] **UWAGA:** Zakładamy, że dziedziny funkcji są tak dobrane, że operacje definiujące funkcję są wykonalne oraz że dziedziny są maksymalnymi zbiorami o tej własności. Pierwiastki stopnia **nieparzystego** są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

$f''(x) = -\frac{4(9x^4+36x^3+8x^2-56x-181)}{9\sqrt[3]{(x^2+2x-5)^7(x^2+2x-7)^5}}$ oraz że druga pochodna ma dokładnie dwa pierwiastkami rzeczywiste $x_1 \approx 1{,}7$ oraz $x_2 \approx -3{,}7$ i że są one jednokrotne.

59. Dowieść, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną i istnieje taka liczba $L \in (0,1)$, że dla każdego x zachodzi nierówność $|f'(x)| \leqslant L$, to istnieje dokładnie taka liczba p, że $f(p) = p$. Czy teza pozostaje prawdziwa przy założeniu, że $|f'(x)| < 1$ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$?

60. Załóżmy, że funkcje $f, g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne oraz $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$. Dowieść, że między każdymi dwoma pierwiastkami funkcji f leży pierwiastek funkcji g.

61. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją, że nierówność $f\big(\frac{x+y}{2}\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ oraz funkcja f jest ograniczona na pewnym przedziale $(c,d) \subseteq (a,b)$, to f jest wypukła.

62. Dowieść, że jeśli $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest taką funkcją różniczkowalną, że dla dowolnych $x, y \in (a,b)$ istnieje dokładnie jedna liczba c leżąca między x i y, że $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$, to funkcja f jest ściśle wypukła albo ściśle wklęsła.

63. Dowieść, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ i $g(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$ oraz funkcja $g\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na (a,b), to istnieje taka liczba $c \in (a,b)$, że $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ — nie zakładamy tu ciągłości funkcji g w a, ani w b.

64. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną i niech $p \in (a,b)$. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_y - x_n} = f'(p)$ dla dowolnych ciągów (x_n), (y_n) zbieżnych do p wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna f' jest ciągła w punkcie p.

65. Niech $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną na przedziale (a,b). Dowieść, że jeśli istnieje taka liczba $c \geqslant 0$, że $|f'(x)| \leqslant cf(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$ i $f(a) = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdego x.