POCHODNA FUNKCJI

Funkcje służą do opisu różnych zjawisk fizycznych, ekonomicznych, biologicznych itd. Uzyskanie samego opisu matematycznego jest na ogół pierwszym krokiem do zbadania zjawiska. Wielokrotnie jedna z dróg prowadzących do celu jest poznanie własności funkcji. Jednym z pierwszych problemów, które trzeba rozwiązywać jest ustalenie w jakim tempie zmieniają się wartości funkcji. Tego rodzaju kwestie napotykamy przy próbach znalezienia największych lub najmniejszych wartości funkcji, przy ustalaniu prędkości z jaką porusza się interesujący nas obiekt, przyspieszenia, zmiany liczby ludzi lub zwierząt na jakimś obszarze itd. Do pojęcia pochodnej, czyli wielkości mierzącej tempo zmian funkcji, ludzie dochodzili stopniowo. Matematycy i fizycy w wieku XVII i XVIII (Fermat, Newton, Leibniz i inni), ekonomiści nieco później, niezależnie od matematyków i fizyków (stąd nieco inna terminologia: np. koszt krańcowy, dochód krańcowy, ...). Za początek rachunku różniczkowego i całkowego przyjmuje się przełom wieków XVII i XVIII. Główne odkrycia zostały dokonane przez Newtona (1643–1727) i Leibniza (1646–1716). Początkowo nie istniał właściwy język, którym można by opisywać uzyskiwane rezultaty, ale na początku XIX wieku i później teoria została usystematyzowana dzięki pracom wielu matematyków, głównie wspominanego już Augusta Cauchy'ego.

Podamy teraz ścisłą definicję. Motywy, dla których jest ona właśnie tak wypowiadana zostały podane w poprzednim rozdziale.

Definicja 22.1 (pochodnej)
Załóżmy, że funkcja f jest określona w dziedzinie zawierającej przedział otwarty o środku p i że istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$. Granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $f'(p)$ lub $\frac{df}{dx}(p)$. Jeśli pochodna jest skończona, to

mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p. Funkcję liniową przypisującą liczbie h liczbę $f'(p)h$ nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy symbolem $df(p)$, a wartość tej funkcji liniowej w punkcie h oznaczamy symbolem $df(p)(h)$ lub częściej $df(p)h$. ■

Wyrażenie $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ zwane jest ilorazem funkcji f w punkcie p. Jest ono funkcją zmiennej h. Będziemy jednak czasem traktować je jako funkcję zmiennej $p+h$ lub p.

Powtórzymy też definicje stycznej do wykresu funkcji.

Definicja 22.2 (prostej stycznej do wykresu funkcji)
Załóżmy, że funkcja f ma pochodną w punkcie p oraz że jest ciągła w punkcie p.[22.1] Jeśli pochodna $f'(p)$ jest skończona, to mówimy, że styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta, której współczynnik kierunkowy jest równy $f'(p)$, przechodząca przez punkt $P = (p, f(p))$. Jeżeli $f'(p) = \infty$ albo $f'(p) = -\infty$, to mówimy, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $(p, f(p))$ jest prosta pionowa przechodząca przez ten punkt, czyli prosta o równaniu $x = p$. ■

Z tej definicji wynika od razu, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to prosta styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(p, f(p))$ ma równanie $y = f'(p)(x-p) + f(p)$.

Dodajmy jeszcze, że czasem rozważane są funkcje określone np. na przedziale postaci $[p, b)$. Wtedy też często mówimy o pochodnej funkcji f w punkcie p, ale w tym przypadku nazywamy ją prawostronną.

Niekiedy np. pochodną funkcji x^2 w punkcie p będziemy oznaczać symbolem $(x^2)'_{x=p}$, a funkcji e^x w punkcie $\sqrt{5}$ — sym-

[22.1] Wykażemy później, że jeśli pochodna $f'(p)$ funkcji f w punkcie p jest skończona, czyli że f jest różniczkowalna w punkcie p, to funkcja f jest ciągła w punkcie p, więc w tym przypadku nie ma potrzeby dodatkowo zakładać ciągłości funkcji w punkcie p.

bolem $(e^x)'_{x=\sqrt{5}}$.

Z własności granicy funkcji wynika, że istnienie pochodnej funkcji w punkcie p jest własnością **lokalną**. Oznacza to, że jeśli dwie funkcje f i g pokrywają się na pewnym przedziale otwartym o środku w punkcie p, to albo obie mają pochodną w punkcie p i te pochodne są równe, albo żadna z nich pochodnej w tym punkcie nie ma.

Przykład 22.1 Niech $f(x) = ax + b$. W tym przypadku iloraz różnicowy

$$\tfrac{f(p+h)-f(p)}{h} = \tfrac{a(p+h)-ap}{h} = a$$

jest niezależny od h, zresztą również od p. Wobec tego pochodna funkcji liniowej $ax + b$ jest równa a. Z tego wynika, że prostą styczną do prostej $y = ax + b$ jest ona sama, co nie powinno dziwić, bo ona sama do siebie przylega najlepiej ze wszystkich prostych. Często stosowany jest zapis $(ax + b)' = a$. ■

Przykład 22.2 Niech $f(x) = x^2$ i niech p będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Mamy $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 2p + h \xrightarrow[h\to 0]{} 2p$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest liczba $2p$. Zwykle piszemy $(x^2)' = 2x$. Ponieważ $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ jest pozioma. Jeśli natomiast $p = 10$, to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu jest równy 20, więc styczna w punkcie $(20, 400)$ jest prawie pionowa. ■

Przykład 22.3 Niech $f(x) = x^3$. Tym razem zachodzi równość $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = 3p^2 + 3ph + h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 3p^2$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest $3p^2$, tzn. $(p^3)' = 3p^2$. W szczególności $f'(0) = 0$, więc styczna do wykresu tej funkcji f w punkcie $(0, f(0)) = (0, 0)$ jest pozioma: jej równanie to: $y = 0$. Jednak w tym przypadku wykres nie leży po jednej stronie stycznej, lecz przechodzi z jednej strony tej prostej na drugą.

Pochodna jest dodatnia z jednym wyjątkiem: $f'(0) = 0$. Bez trudu stwierdzamy, że styczna do wykresu tej funkcji w każdym punkcie, z wyjątkiem punktu $(0,0)$, przecina wykres w jeszcze jednym punkcie [22.2], więc w tym przypadku nie jest prawdą, że styczna ma z wykresem funkcji dokładnie jeden punkt wspólny. ∎

Przykład 22.4 $(ax^n)' = nax^{n-1}$ dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby rzeczywistej a. Wynika to — tak jak w poprzednich dwóch przykładach — z wzoru

$$a(p+h)^n - ap^n = \binom{n}{1}ap^{n-1}h + \binom{n}{2}ap^{n-2}h^2 + \cdots + h^n .$$ ∎

Przykład 22.5 Teraz zajmiemy się funkcją $f(x) = |x|$. Jeśli $p > 0$ i $|h| < p$, to $\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \frac{p+h-p}{h} = 1 = 1 \xrightarrow[h\to 0]{} 1$, co oznacza, że pochodną funkcji f w punkcie p jest 1. W taki sam sposób pokazać można, że $f'(p) = -1$ dla każdej liczby $p < 0$. Należy rozważyć jeszcze jeden przypadek, mianowicie $p = 0$. Jeśli $h > 0$, to $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$, zatem $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$. Analogicznie $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$. Z tych dwu równości wynika od razu, że nie istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$, czyli że funkcja $|x|$ pochodnej w punkcie 0 nie ma, chociaż jest ciągła — ma ona w tym punkcie pochodne jednostronne, ale są one różne. Na wykresie funkcji jest to widoczne, w punkcie $(0,0)$ wykres się załamuje, można powiedzieć, że wykres ma w tym punkcie „ostrze". Rezultaty tych rozważań można opisać wzorem $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$. ∎

Przykład 22.6 Podamy teraz przykład świadczący o tym, że istnieją funkcje ciągłe, które przynajmniej w niektórych punktach nie mają pochodnych jednostronnych. W pierwszym czytaniu ten przykład można opuścić i wrócić do niego później. Warto też spróbować sporządzić szkic wykresu funkcji, co może ułatwić

[22.2] Czytelnik zechce sprawdzić w jakim — to pomaga w zrozumieniu tekstu!

zrozumienie sytuacji. Przechodzimy do szczegółów.

Niech $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Z oczywistej nierówności $|f(x)| \leqslant |x|$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, a to znaczy, że funkcja f jest ciągła w punkcie 0. Ciągłość w innych punktach jest oczywistym wnioskiem z twierdzenia o operacjach na funkcjach ciągłych i twierdzenia o ciągłości złożenia dwu funkcji. Z twierdzeń, które wykażemy niedługo, wynika, że funkcja ta ma pochodną skończoną w każdym punkcie $x \neq 0$.

Wykażemy teraz, że ta funkcja pochodnej w punkcie 0 nie ma, dokładniej, że w tym punkcie funkcja nie ma pochodnej prawostronnej w punkcie 0. Jeśli $h > 0$, to $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \sin\frac{1}{h}$. Funkcja ta nie ma granicy prawostronnej w punkcie 0 bowiem: $f\big(\frac{1}{2n\pi}\big) = 0$ oraz $f\big(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\big) = 1$. Widzimy, więc że dla każdej liczby naturalnej n punkt $\big(\frac{1}{2n\pi}, 0\big)$ leży na wykresie funkcji, co oznacza, że styczną do wykresu funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być pozioma oś układu współrzędnych. Jednakże dla każdej liczby naturalnej n punkt $\big(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}\big)$ leży na wykresie funkcji, więc styczną powinna być prosta, na której te punkty leżą, czyli prosta o równaniu $y = x$ — styczną ma być prosta najdokładniej ,,przylegająca" do wykresu.

Podobnie można uzasadniać, że styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0,0)$ powinna być prosta o równaniu $y = kx$, gdzie k jest dowolną liczbą z przedziału $[-1,1]$ — na każdej takiej prostej znajdują się punkty leżące na wykresie funkcji f, tworzące ciąg zbieżny do 0. Można powiedzieć, że wykres funkcji $x\sin\frac{1}{x}$ oscyluje między prostymi $y = x$ oraz $y = -x$ i do żadnej z nich ani do żadnej leżącej w kącie przez nie wyznaczonym w punkcie $(0,0)$ nie ,,przylega". ■

Przykład 22.7 Obliczymy teraz pochodną funkcji wykładniczej. Niech $f(x) = e^x$. Mamy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x$

— wykazaliśmy w rozdziale 18, że ta równość ma miejsce. Pochodną funkcji wykładniczej o podstawie e w punkcie x jest liczba e^x, czyli $(e^x)' = e^x$. Równanie stycznej w punkcie (p, e^p) do wykresu funkcji e^x ma więc postać $y = e^p(x-p) + e^p$. ■

Przykład 22.8 Następną bardzo ważną funkcją jest logarytm naturalny. Znajdziemy jej pochodną. Niech $f(x) = \ln x$ dla każdej liczby dodatniej x. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ – wzór ten wykazaliśmy w rozdziale 18. Mamy więc dla $x > 0$ następującą równość: [22.3]

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+x/h)}{x/h} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Pochodną logarytmu naturalnego w punkcie x jest więc liczba $\frac{1}{x}$, czyli $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Styczna w punkcie $(p, \ln p)$ do wykresu logarytmu naturalnego ma równanie $y = \frac{1}{p}(x-p) + \ln p$. ■

Przykład 22.9 Ostatnią z krótkiego cyklu ,,najważniejszych" funkcji elementarnych jest sinus. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — ta równość została wykazana w rozdziale 19. Z niej wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \cos(x + \tfrac{h}{2}) = \cos x.$$

Udało się więc nam wykazać, że pochodną funkcji sinus w punkcie x jest liczba $\cos x$, czyli że zachodzi wzór $(\sin x)' = \cos x$. Wobec tego równanie stycznej w punkcie $(p, \sin p)$ do wykresu funkcji sinus to $y = (x-p)\cdot\cos p + \sin p$. Np. styczna do wykresu funkcji sinus w punkcie $(0,0)$ ma równanie $y = x$. ■

Przykład 22.10 Znajdziemy jeszcze pochodną funkcji $\sqrt[3]{x}$. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Podobnie można wykazać, że $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt[n]{nx^{n-1}}} = \frac{1}{n}x^{-1+1/n}$. ■

[22.3] Przypomnijmy, że $\ln(x+h) - \ln x = \ln\frac{x+h}{x} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

Uwaga 22.3 Wzory na pochodne funkcji x^n i $\sqrt[n]{x}$ to szczególne przypadki jednego ogólniejszego wzoru $(x^a)' = ax^{a-1}$, którego dowód niebawem poznamy. ■

Następne twierdzenie jest ważne i ma bardzo prosty dowód.

Twierdzenie 22.4 (o najlepszym przybliżeniu liniowym) Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w punkcie p. Równość

$$\lim_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p oraz $a = f'(p)$ i $b = f(p)$.

Dowód. Jeśli $\lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-(ah+b)}{h} = 0$, to $\lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-b}{h} - a = 0$. Stąd $a = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-b}{h}$, zatem $0 = \lim\limits_{h\to 0} ah = \lim\limits_{h\to 0}(f(p+h)-b)$, czyli $b = \lim\limits_{h\to 0} f(p+h) = f(p)$. Z ostatniej równości wynika, że $a = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-b}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$, a to oznacza, że f jest różniczkowalna w punkcie p i zachodzi równość $a = f'(p)$, co kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

Jeżeli $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-f(p)}{h}$, to zachodzi następująca równość $0 = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-f(p)}{h} - f'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(p+h)-f(p)-f'(p)h}{h}$, co dowodzi prawdziwości wynikania w drugą stronę. ■

Z twierdzenia tego wynika, że spośród wszystkich wielomianów zmiennej x, stopnia nie większego od 1 najlepiej w otoczeniu punktu p przybliża funkcję f wielomian

$$f(p) + f'(p)(x-p).$$

Żadne z twierdzeń do tej pory sformułowanych nie daje jawnego oszacowania błędu przybliżenia. O tym będzie mowa później. Pokażemy, teraz kilka przykładów.

Przykład 22.11 $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}}\cdot 1 = 7 + \frac{1}{14}$ — przyjęliśmy tu $h = 1$, $f(x) = \sqrt{x}$, zatem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $p = 49$. Chociaż 1 nie jest małą liczbą, jednak przybliżenie, które uzyskaliśmy jest dosyć dobre. Rzeczywiście,

$$\left(7+\tfrac{1}{14}\right)^2 = 49+2\cdot 7\cdot \tfrac{1}{14}+\left(\tfrac{1}{14}\right)^2 = 50+\tfrac{1}{196}\,.$$

Widzimy więc, że po podniesieniu do kwadratu przybliżonej wartości pierwiastka, otrzymaliśmy liczbę nieco tylko większą od 50. Mamy $7,07 < 7+\frac{1}{14} < 7,08$ oraz $7,07^2 = 49,9849$, co oznacza, że nasze przybliżenie pozwoliło nam znaleźć dwie cyfry po przecinku liczby $\sqrt{50}$ bez wykonania trudnych obliczeń! Wartość przybliżona jest w tym przypadku większa niż rzeczywista, bo styczna do wykresu pierwiastka kwadratowego leży nad nim. ■

Przykład 22.12 $50^2 = (49+1)^2 \approx 49^2+2\cdot 49\cdot 1 = 2499$. Tym razem $f(x)=x^2$, zatem $f'(x)=2x$, $p=49$ i $h=1$. W rzeczywistości $50^2 = 2500$, więc tym razem błąd, który popełniamy stosując wzór przybliżony zamiast dokładnego jest równy 1, więc jest ponad 100 razy większy niż w poprzednim przykładzie. ■

Przykład 22.13 $e^{50} = e^{49+1} \approx e^{49}+e^{49}\cdot 1 = 2\cdot e^{49}$. W tym przykładzie przyjmujemy $f(x) = e^x = f'(x)$, $p=49$ i $h=1$. Zatem błąd to $e^{50}-2\cdot e^{49} = (e-2)\cdot e^{49} > 0,7\cdot e^{49}$, jest więc ogromny i to nie tylko w porównaniu z $h=1$, ale wręcz porównywalny z wartością funkcji.

Mamy: $e^{50} \approx 5,1847055286\cdot 10^{21}$, $e^{49}\approx 1,9073465725\cdot 10^{21}$ i wreszcie $e^{50}-2\cdot e^{49}\approx 1,370012371\cdot 10^{21}$ — to rezultaty uzyskane za pomocą programu komputerowego (Mathematica 7). Widzimy więc, że w tym ostatnim przypadku przybliżanie za pomocą wzoru $f(p+h) \approx f(p)+f'(p)h$ w ogóle nie ma sensu. Przekonamy się później o tym, że jest to spowodowane niewielkimi zmianami pochodnej funkcji $\sqrt{x}$ w interesującym nas obszarze, istotnie szybszymi zmianami pochodnej funkcji x^2 i bardzo szybkim wzrostem pochodnej funkcji e^x. ■

Definicja 22.5 (różniczki funkcji)

Różniczką funkcji f w punkcie p nazywamy takie przekształcenie liniowe $L\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $L(0) = 0$ i $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)-L(h)}{h} = 0$. Różniczkę funkcji f w punkcie p oznaczamy symbolem $df(p)$, więc jej wartość w punkcie h — symbolem $df(p)(h)$, jednak często piszemy $df(p)h$. ■

Czasem zamiast $df(p)$ piszemy $Df(p)$. Pochodna $f'(p)$ funkcji f w punkcie p i jej różniczka $df(p)$ powiązane są wzorem $df(p)h = df(p)(h) = f'(p)h$. Dodajmy jeszcze, że często stosowane jest oznaczenie $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$.

W świetle definicji różniczki twierdzenie o najlepszym przybliżeniu liniowym można sformułować tak: *funkcja f ma różniczkę w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma w tym punkcie skończoną pochodną. Zachodzi wtedy wzór: $df(p)h = df(p)(h) = f'(p)h$.*

Definicja 22.6 (różniczkowalności)

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy ma różniczkę w punkcie p, czyli gdy ma skończoną pochodną w punkcie p. ■

Twierdzenie 22.7 (o ciągłości funkcji różniczkowalnej)

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{x\to p} f(x) = f(p) + \lim\limits_{h\to 0} (f(p+h) - f(p)) =$
$= f(p) + \lim\limits_{h\to 0} h \cdot \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f(p) + 0 \cdot f'(p) = f(p)$. ■

Uwaga 22.8

Z istnienia nieskończonej pochodnej funkcji w punkcie nie wynika jej ciągłość w tym punkcie. Niech $f(x) = \frac{x}{|x|}$ dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$. Wtedy $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{|h|} = \infty$. Oczywiście w punkcie 0 funkcja jest nieciągła. ■

Uwaga 22.9

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia o ciągłości funkcji różniczkowalnej jest nieprawdziwe. Funkcja $|x|$ jest ciągła, ale nie ma pochodnej w punkcie 0, bo ma pochodne jednostronne, ale są one różne. Jeśli $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ i $f(0) = 0$, to funkcja f jest ciągła we wszystkich punktach, ale w punkcie 0 nie ma nawet jednostronnej pochodnej. ■

Twierdzenie 22.10 (o arytmetycznych własnościach pochodnej)
Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie p. Wtedy funkcje $f \pm g$, $f \cdot g$ i, jeśli $g(p) \neq 0$, to również $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w punkcie p i zachodzą wzory:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,, \quad (f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$
$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)\,, \quad \left(\tfrac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Dowód. Zachodzą równości $f'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ oraz $g'(p) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h}$. Wiemy też, że te pochodne są skończone. Stąd i z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy funkcji wynika, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)+g(p+h)-f(p)-g(p)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} = f'(p) + g'(p)\,.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie o pochodnej sumy dwu funkcji różniczkowalnych. W identyczny sposób dowodzimy twierdzenie pochodnej różnicy funkcji różniczkowalnych.

Zajmiemy się teraz iloczynem funkcji różniczkowalnych. Tym razem skorzystamy z udowodnionego wcześniej twierdzenia o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Mamy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(p+h)g(p+h)-f(p)g(p)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(p+h)-f(p)\big)\cdot g(p+h) + f(p)\big(g(p+h)-g(p)\big)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(p+h) + f(p)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(p+h)-g(p)}{h} =$$
$$= f'(p)g(p) + f(p)g'(p)\,.$$

Teraz kolej na iloraz. Założyliśmy dodatkowo, że $g(p) \neq 0$. Wynika stąd, że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $|h| < \delta$, to $|g(p+h) - g(p)| < |g(p)| = |0 - g(p)|$. Wnioskujemy stąd, że liczby $g(p)$ i $g(p+h)$ leżą po tej samej stronie zera, w szczególności $g(p+h) \neq 0$. Mamy zatem

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)}{g(p+h)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p) - f(p)g(p+h)}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)g(p) - f(p)g(p) - \big(f(p)g(p+h) - f(p)g(p)\big)}{hg(p+h)g(p)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(p+h)-f(p)}{h} g(p) - f(p)\frac{g(p+h)-g(p)}{h}}{g(p+h)g(p)} = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}.$$

Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 22.11 (o pochodnej złożenia)

Załóżmy, że funkcja g jest różniczkowalna w punkcie p, zaś funkcja f, określona na zbiorze zawierającym wszystkie wartości funkcji g, jest różniczkowalna w punkcie $g(p)$. Wtedy złożenie tych funkcji $f \circ g$ jest różniczkowalne w punkcie p i zachodzi wzór:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Niech $y = g(x)$. Możemy teraz napisać $(f \circ g)'(x) = f'(y)g(x)$ lub $\frac{d(f\circ g)}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(g(x)) \cdot \frac{dg}{dx}(x) = \frac{df}{dy}(y) \cdot \frac{dg}{dx}(x)$ lub krócej $\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dg}{dx}$. Często wzór ten zapisywany jest w postaci $\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$ lub, po oznaczeniu $z = f(y)$, jako $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. W literaturze anglojęzycznej nosi nazwę ,,the Chain Rule", czego oczywistym motywem jest jego ostatnia postać, zwłaszcza jeśli zastosujemy go nie w przypadku złożenia dwu funkcji, lecz większej ich liczby — wtedy łańcuch staje się bardziej widoczny.

Dowód. Mamy do czynienia z dwiema funkcjami różniczkowalnymi: f w punkcie $q = g(p)$ oraz g w punkcie p. Zdefiniujmy $r_g(h) = \frac{g(p+h)-g(p)-g'(p)h}{h}$ dla $h \neq 0$ i $r_g(0) = 0$. Różniczkowalność funkcji g w punkcie p równoważna jest ciągłości funkcji r_g w punkcie 0. Mamy: $g(p+h) = g(p) + g'(p)h + r_g(h)h$.

Niech $r_f(H) = \frac{f(g(p)+H)-f(g(p))}{H}$ dla $H \neq 0$ oraz $r_f(0) = 0$. Tak jak w przypadku funkcji g funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $q = g(p)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja r_f jest ciągła w punkcie 0. Również w tym przypadku zachodzi równość: $f(g(p)+H) = f(g(p))+f'(g(p))H+r_f(H)H$. Możemy ,,wydzielić część liniową złożenia" $f\circ g$ w otoczeniu punktu p:

$$f\big(g(p+h)\big) = f\big(g(p)+g'(p)h+r_g(h)h\big) =$$
$$= f\big(g(p)\big) + f'\big(g(p)\big)\cdot\big(g'(p)h+r_g(h)h\big) +$$
$$+ r_f\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)\cdot\big(g'(p)h+r_g(h)h\big) =$$
$$= f(g(p)) + f'(g(p))\cdot g'(p)h +$$
$$+ h\cdot\left[f'\big(g(p)\big)r_g(h) + r_f\big(g'(p)h+r_g(h)h\big)\cdot\big(g'(p)+r_g(h)\big)\right].$$

Jasne jest, że granicą wyrażenia znajdującego się w nawiasie kwadratowym przy $h \longrightarrow 0$ jest liczba 0. Stąd zaś wynika od razu, zob. twierdzenie o najlepszym przybliżeniu liniowym, że pochodną funkcji $f\circ g$ w punkcie p jest liczba $f'(g(p))g'(p)$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 22.12 (o pochodnej funkcji odwrotnej)
Niech $f\colon (a,b) \xrightarrow{na} (c,d)$. Załóżmy, że

funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$,

funkcja f jest różnowartościowa,

funkcja f^{-1}, odwrotna do f, jest ciągła w punkcie $q = f(p)$.

Wtedy funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie q i zachodzi wzór $\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)}$.

Dowód. Tym razem wiemy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, że $f'(p) \neq 0$ oraz że funkcja f^{-1} odwrotna do funkcji f jest ciągła w punkcie $q = f(p)$. Wystarczy wykazać, że $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h} = \frac{1}{f'(p)}$. Niech $H = f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q)$. Oczywiście H zależy od h. Z ciągłości funkcji f^{-1} w punkcie q wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0} H = 0$. Zachodzi też równość

$$h = q+h-q = f(f^{-1}(q+h)) - f(f^{-1}(q)) =$$

$$= f(f^{-1}(q) + H) - f(f^{-1}(q)) = f(p + H) - f(p)\,.$$

Z niej i z poprzednich wynika, że

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{f^{-1}(q+h)-f^{-1}(q)}{h} = \lim_{H\to 0} \tfrac{H}{f(p+H)-f(p)} = \tfrac{1}{f'(p)}\,. \ \blacksquare$$

Uwaga 22.13

Wzór na pochodną funkcji odwrotnej można też zapisać w taki sposób: $\left(f^{-1}\right)'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$ lub tak: $\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$. Piszemy też $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$, oznaczywszy uprzednio $y = f(x)$. Ten ostatni zapis, zwłaszcza w połączeniu z wzorem $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ sugeruje, że symbol $\frac{dy}{dx}$ można traktować jak ułamek. Trzeba jednak uważać, bo nie oznacza on ułamka, lecz pochodną i posługiwać się analogiami z ilorazem jedynie w zakresie dopuszczonym wykazanymi twierdzeniami. Można np. napisać wzór $\frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} = \frac{d(g+h)}{dx}$ — oznacza on, że pochodna sumy dwu funkcji względem zmiennej x jest równa sumie ich pochodnych względem tej samej zmiennej x. Wzoru $\frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} = \frac{df\cdot dx + dg\cdot dy}{dy\cdot dx}$ napisać **nie można** np. dlatego, że jego prawa strona nie ma sensu — w ogóle nie jest zdefiniowana. Później rozważać będziemy pochodne wyższych rzędów i tam sytuacja będzie jeszcze bardziej skomplikowana. ■

Uwaga 22.14

Założenia w twierdzeniu o pochodnej funkcji odwrotnej są istotne. Warto jednak zaznaczyć, że jeśli założymy dodatkowo, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b), to funkcja odwrotna będzie ciągła w każdym punkcie przedziału (c, d). Rzecz w tym, że z różniczkowalności funkcji f w jednym tylko punkcie ciągłość funkcji odwrotnej nie wynika. ■

Ostatnie z tego cyklu twierdzeń służących do obliczania pochodnych mówi jak można obliczać pochodną sumy szeregu potęgowego, czyli szeregu postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Przypomnijmy, że dla każdego ciągu (a_n) istnieje takie $r \in [0, \infty]$, że z nierówności $|x-x_0| < r$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ i to bezwzględna, a z nierówności $|x-x_0| > r$ — rozbieżność, a nawet równość $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a_n(x-x_0)^n\right| = \infty$. Mówimy, że r jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie 22.15 (o pochodnej szeregu potęgowego) Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności, to **wewnątrz** przedziału zbieżności suma tego szeregu jest funkcją różniczkowalną i zachodzi wzór:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Dowód. Będziemy dowodzić twierdzenie zakładając, że $x_0 = 0$, co nie zmniejsza ogólności rozważań.

Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ jest zbieżny i że $|x| < |x_1|$. Niech k będzie dowolną liczba naturalną. Wtedy $\left|n^k a_n x^n\right| = n^k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \cdot \left|a_n x_1^n\right|$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, więc ciąg $\left(\left|a_n x_1^n\right|\right)$ jest ograniczony. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ jest zbieżny, co wynika np. z kryterium ilorazowego, zatem szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Wykażemy, że funkcja s przypisująca liczbie x sumę szeregu $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (-r, r)$ oraz że zachodzi równość

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Zakładamy dalej, że $|x| < r$, że $0 < |h| < d < r - |x|$. Stąd wynika, że $|x+h| \leqslant |x| + |h| < r$, więc szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+h)^n$ są zbieżne i to bezwzględnie. Mamy więc

$$\left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right)\right| =$$

$$= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right| \leqslant |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^{k-2} \leqslant$$

$$\leqslant |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, n^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} |x|^{(n-2)-(k-2)} |h|^{k-2} =$$

$$= \ |h| \ \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + |h|\right)^{n-2} \ \leqslant \ |h| \ \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + d\right)^{n-2},$$

przedostatnia nierówność wynika z tego, że jeśli $n \geqslant k \geqslant 2$, to

$$\binom{n}{k} = \tfrac{n\cdot(n-1)}{(k-1)\cdot k} \cdot \binom{n-2}{k-2} \leqslant n^2 \binom{n-2}{k-2}.$$

Oczywiście $\lim\limits_{h\to 0} |h| \cdot \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^2 |a_n| \left(|x| + d\right)^{n-2} = 0$, zatem

$$\lim_{h\to 0} \left[\tfrac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] = 0,$$

a stąd od razu wynika, że $s'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Dowód został zakończony. ■

Uwaga 22.16

Wypada przestrzec, że szeregów na ogół nie wolno różniczkować w taki sposób, jak się różniczkuje sumy skończone. Niemiecki matematyk, K.Weierstrass, wykazał, że suma szeregu, którego wyrazy są bardzo porządnym funkcjami, różniczkowalnymi wszędzie, np. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(7^n \pi x)$ jest funkcją ciągła na całej prostej, ale nie ma skończonej pochodnej w żadnym punkcie. ■

Przykład 22.14 Logarytm naturalny to funkcja ciągła, bowiem odwrotna do funkcji e^x. Ponieważ $\left(e^x\right)' = e^x > 0$, więc z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej wynika, że logarytm ma pochodną w każdym punkcie swej dziedziny. Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że zachodzi równość

$$1 = (x)' = \left(e^{\ln x}\right)' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'.$$

Stąd mamy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Ten wzór uzyskaliśmy już wcześniej, ale przedstawiona w tym przykładzie metoda jest bardzo ważna. ■

Przykład 22.15 Zajmiemy się teraz przez chwilę funkcją wykładniczą o dowolnej podstawie. Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, x — dowolną liczbą rzeczywistą. Mamy:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^x\ln a\,. \quad ■$$

Przykład 22.16 Niech $f(x)=x^a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, zaś x jest liczbą dodatnią. Wykażemy, że

$$(x^a)' = ax^{a-1}\,.$$ [22.4]

Z definicji logarytmu wynika, że $x^a = e^{a\ln x}$. Korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia dwu funkcji oraz poprzednio wyprowadzonych wzorów na pochodne funkcji wykładniczej, logarytmu i funkcji liniowej otrzymujemy:

$$(x^a)' = \left(e^{a\ln x}\right)' = xe^{a\ln x}\cdot a\cdot\tfrac{1}{x} = ax^{a-1}\,.$$

Dodać wypada, że potęgę x^a można zdefiniować również w przypadku $x=0$ i $a>0$ oraz w przypadku $x<0$, jeśli a jest liczbą wymierną, której mianownik jest całkowitą liczbą nieparzystą, a licznik — liczbą całkowitą, po ewentualnym skróceniu. Pozostawiamy Czytelnikom uzasadnienie tego, że w obu tych przypadkach podany przez nas wzór na pochodną funkcji potęgowej pozostaje w mocy, oczywiście w przypadku pierwszym mowa jest jedynie o pochodnej prawostronnej, chyba że a jest wykładnikiem dodatnim, wymiernym o mianowniku nieparzystym (mowa o zapisie liczby wymiernej w postaci ułamka nieskracalnego, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi). ■

Przykład 22.17 Znajdziemy pochodną funkcji kosinus. Mamy $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Skorzystamy z tego, że $(\sin x)' = \cos x$ i wzoru na pochodną złożenia:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\right)' = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)' = -\sin x$$

[22.4] Dla $a\in\mathbb{N}$ oraz $a=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ wzór pojawił się wcześniej.

— tutaj rolę funkcji f z wzoru na pochodną złożenia pełni sinus, którego pochodną jest kosinus, zaś rolę funkcji g odgrywa funkcja $\frac{\pi}{2} - x$, której pochodną jest -1. ■

Przykład 22.18 Zastosujemy wzór na pochodną ilorazu dla uzyskania wzoru na pochodną funkcji tangens:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \tfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2} =$$

$$= \tfrac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \tfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\,.$$ ■

Przykład 22.19 Teraz kolej na kotangens. Wzór ten można uzyskać na różne sposoby, np. modyfikując nieznacznie wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji tangens. Można też zastosować metodę znaną już z wyprowadzenia wzoru na pochodną funkcji kosinus i właśnie tak postąpimy:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \tfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot (-1) = -\tfrac{1}{\sin^2 x} =$$

$$= -1 - \operatorname{ctg}^2 x\,.$$ ■

Przykład 22.20 Niech $f(0) = 0$ i $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$. Dla $x \neq 0$ mamy $f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + {}$ $+x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Mamy też $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$. Funkcja f jest więc wszędzie różniczkowalna. Łatwo można stwierdzić, że nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, wystarczy przyjąć $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Widać, że pochodna funkcji różniczkowalnej może mieć punkty nieciągłości. ■

Przykład 22.21 Obliczymy pochodną funkcji $\frac{x^4 - 3x^3 + \sin x}{4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}}$. Mamy $\left(x^4 - 3x^3 + \sin x\right)' = 4x^3 - 9x^2 + \cos x$ oraz $\left(4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}\right)' = -\sin x + \cos\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} =$ $= -\sin x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2}$. Z wzoru na pochodną ilorazu wynika, że $\left(\frac{x^4 - 3x^3 + \sin x}{4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{(4x^3 - 9x^2 + \cos x)(4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2}))}{(4 + \cos x + \sin\sqrt{1+x^2})^2} -$

$$-\frac{(x^4-3x^3+\sin x)(-\sin x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cos\sqrt{1+x^2})}{(4+\cos x+\sin\sqrt{1+x^2})^2}\,.\ \blacksquare$$

W dalszym ciągu będziemy używać jeszcze dwu funkcji zdefiniowanych jako odwrotne do funkcji sinus i tangens. Oczywiście funkcje sinus i tangens jako okresowe nie są różnowartościowe, więc nie mają funkcji odwrotnych. Można więc postąpić tak, jak w przypadku pierwiastka kwadratowego, który jest zdefiniowany jako funkcja odwrotna do funkcji x^2 rozpatrywanej nie na całej dziedzinie, lecz na zbiorze, na którym funkcja x^2 jest różnowartościowa, i to możliwie najprostszym o tej własności. [22.5] Wybieramy możliwe najbardziej naturalne dziedziny.

W przypadku sinusa ograniczymy się do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, a w przypadku tangensa — do przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Zbiory wartości to odpowiednio przedział domknięty $[-1,1]$ i cała prosta $(-\infty,+\infty)$. Tradycyjnie zamiast pisać $\sin^{-1}$ piszemy $\arcsin$, a zamiast tg^{-1} piszemy arctg [22.6], co zresztą pozwala na uniknięcie dwuznaczności związanej z oznaczeniami $\sin^{-1}$ i tg^{-1}. Podamy teraz definicje tych funkcji w jawny sposób.

Definicja 22.17 (funkcji arcsin i arctg) [22.7]

Jeśli $x\in[-1,1]$, to $\arcsin x$ jest jedyną liczbą z przedziału domkniętego $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, dla której zachodzi równość $\sin(\arcsin x)=x$. Jeśli $x\in\mathbb{R}$, to $\mathrm{arctg}\,x$ jest jedyną liczbą rzeczywistą z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, dla której zachodzi równość $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$. $\blacksquare$

Przykład 22.22 $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{arctg}\,0=0$. $\blacksquare$

[22.5] Zbiorów, na których funkcja x^2 jest różnowartościowa jest bardzo dużo, np, $[-1,0]\cup(1,+\infty)$, $(-\infty,-2)$, $(-\infty,0]$, $[0,+\infty)$, zbiór złożony ze wszystkich liczb wymiernych dodatnich oraz ujemnych liczb niewymiernych i wiele innych.

[22.6] W niektórych krajach i programach komputerowych arctan.

[22.7] Czytamy arkus sinus lub arkus tangens, termin pochodzi od łacińskiego słowa łuk. Funkcja przypisuje liczbie rzeczywistej długość łuku odpowiadającego kątowi, którego sinus lub tangens równy jest danej liczbie.

Ponieważ funkcje sinus i tangens są ciągłe odpowiednio na przedziałach $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ i $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, więc odwrotne do nich są ciągłe na przedziałach $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$. Na przedziale otwartym $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ pochodne sinusa i tangensa są różne od 0. Wobec tego funkcje odwrotne do nich, czyli arcsin i arctg są różniczkowalne odpowiednio na $(-1,1)$ i $(-\infty,\infty)$. ■

Zachodzi

Twierdzenie 22.18
Dla każdego $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ zachodzą równości $\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ i $\operatorname{arctg}' x=\frac{1}{1+x^2}$.

Dowód. Istnienie pochodnych wykazaliśmy przed sformułowaniem tego twierdzenia. Wiedząc, że te pochodne istnieją możemy zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Mamy więc

$$1=(x)'=\big(\sin(\arcsin x)\big)'=\cos(\arcsin x)\big(\arcsin x\big)'=$$
$$=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}\big(\arcsin x\big)'=\sqrt{1-x^2}\big(\arcsin x\big)'.$$

Stąd wynika, że $\big(\arcsin x\big)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$1=(x)'=\big(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\big)'=\big(1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)\big)\big(\operatorname{arctg} x\big)'=$$
$$=(1+x^2)\big(\operatorname{arctg} x\big)'.$$

Stąd wynika, że $\big(\operatorname{arctg} x\big)'=\frac{1}{1+x^2}$. ■

Czasem wprowadzane są funkcje arccos i arcctg jako odwrotne do kosinusa i kotangensa ograniczonych odpowiednio do przedziałów $[0,\pi]$ i $(0,\pi)$, Przekształcają one te przedziały na $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$, więc funkcje arccos i arcctg są określone na przedziałach $[-1,1]$ i $(-\infty,\infty)$.

Zadania

1. Znaleźć pochodną funkcji f we wszystkich punktach, w których ona istnieje, jeśli

(1) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\notin\mathbb{Q},\\ 1 & \text{dla } x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{dla } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \mathrm{nwd}(p,q) = 1. \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

2. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = x^2 \cos x$.

3. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = xe^x$.

4. Korzystając jedynie z definicji pochodnej znaleźć liczby $f'(0)$ i $f'(1)$, jeśli $f(x) = x(x-1)$.

5. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(0)$, jeśli $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$.

6. Korzystając jedynie z definicji pochodnej obliczyć $f'(1)$, jeśli $f(x) = (x-1)e^x$.

7. Niech $f(x) = x\sqrt{9 + \sin(\operatorname{tg} x)}$, $\varphi(x) = \sin\left(x\sqrt{4 + \sin(\operatorname{tg} x)}\right)$. Obliczyć $f'(0)$ i $\varphi'(0)$ korzystając tylko z definicji pochodnej.

8. Niech $f(x) = (x-2)|x+3|$. Obliczyć $f'(2)$ korzystając jedynie z definicji pochodnej.

9. Niech $f(x) = (\ln x)\sqrt{1 + 3x^2}$. Obliczyć $f'(1)$ korzystając jedynie z definicji pochodnej.

10. Obliczyć pochodną funkcji f w tych punktach, w których istnieje, jeśli $f(x) =$

(a) $1 - 3x + 7x^2 + 5x^3$;

(ą) $\sqrt{1+x}$;

(c) $\frac{2x}{1+x^2}$;

(ć) $\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;

(d) $\arcsin(\cos x)$;

(e) $\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}$;

(ę) $\sin\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

(f) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

(g) x^x;

(h) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

(i) e^{-x^2};

(j) $e^{\sin x}$;

(k) $(\ln x)^x$;

(l) $\sin(\sin x)$;

(ł) $\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}$; (m) $\ln|x|$;
(n) $\sin^2(\sqrt{x})$; (o) $|\sin x|$;
(ó) $\ln|\sin x|$; (p) $\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;
(r) $x\,|x|$; (ś) $\sqrt{|x|}$;
(t) $\sqrt[3]{x(x+1)}$; (u) $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;
(w) $x\lfloor x\rfloor$; (x) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;
(z) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$; (ż) $\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

11. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie p lub wykazać, że ta styczna nie istnieje, jeśli $f(x)=$
(A) $\cos^2 x-2\sin x,\ p=(\pi,1)$; (B) $\operatorname{arctg}(2x),\ p=(0,0)$;
(C) $|x-1|\sqrt[3]{x+2},\ p=-(3,4)$; (D) $\left(x^2-1\right)^2,\ p=(0,1)$;
(E) $\left(x^2-1\right)^2,\ p=\left(\sqrt{2},1\right)$; (F) $\sqrt[3]{x},\ p=(0,0)$;
(G) $\sqrt[3]{x-\sin x},\ p=(0,0)$; (H) $\sqrt[3]{e^x-1},\ p=(0,0)$;
(I) $\sqrt{1-\cos\left(x\sqrt{2}\right)},\ p=(0,1)$; (J) $1-x^2,\ p=(0,1)$.

12. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, to $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$.

Rozstrzygnąć, czy z istnienia granicy $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ wynika istnienie pochodnej $f'(x)$.

13. Podać przykład funkcji ciągłej $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która jest różniczkowalna w punktach $x\notin\{1,2,\ldots,100\}$ i która nie ma jednostronnych pochodnych w punktach $x\in\{1,2,\ldots,100\}$.

14. Niech $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją a $g\in\mathbb{R}$ taką liczbą, że dla dowolnych ciągów (h_n'), (h_n'') liczb dodatnich zachodzi równość $g=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(7+h_n')-f(7-h_n'')}{h_n'+h_n''}$. Dowieść, że $f'(7)=g$.

15. Podać przykład takiej różnowartościowej funkcji $f\colon\mathbb{R}\xrightarrow{na}\mathbb{R}$, która ma pochodną w punkcie 0 i $f'(0)=1$, że funkcja odwrotna f^{-1} nie ma pochodnej w punkcie $f(0)$.

16. Niech $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie taką funkcją, że dla dowolnych

$x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$. Dowieść, że $f(e) = f(\pi)$.

17. Podać przykład takiej różnowartościowej funkcji $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{na} \mathbb{R}$, która ma pochodną w punkcie 0 i $f'(0) = 0$, że funkcja odwrotna f^{-1} nie ma pochodnej lewostronnej w punkcie $f(0)$ i jest ciągła w punkcie $f(0)$.

18. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą w punkcie p, że funkcja $f^2 = f \cdot f$ jest różniczkowalna w punkcie p.
Dowieść, że funkcja f^k jest różniczkowalna w punkcie p dla dowolnej liczby naturalnej $k \geqslant 2$, tu: $f^{\ell+1}(x) = f^{\ell}(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Czy z założeń o funkcji f wynika, że jest ona różniczkowalna w punkcie p?

19. Czy istnieje taka funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która nie ma jednostronnych pochodnych w punkcie 0, że złożenie $f \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie 0.

20. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n$ dla $x \in (-1,1)$. Dowieść, że funkcja f jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału $(-1,1)$.

21. Dowieść, że jeśli $f^3(x) + 3f(x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(0)$ oraz $f'(0)$.

22. Dowieść, że jeżeli $f(x) + e^{f(x)} = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to funkcja f jest różniczkowalna. Znaleźć liczby $f(1)$ oraz $f'(1)$.

23. Znaleźć wzór na $1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ korzystając z tego, że $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

24. Dowieść, że pochodna funkcji parzystej jest nieparzysta, a pochodna funkcji nieparzystej — parzysta.
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f' jest parzysta, wynika, że funkcja f jest nieparzysta?
Czy z tego, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i f'

jest nieparzysta, wynika, że funkcja f jest parzysta?

25. Funkcja $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Czy z tego, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ wynika, że istnieje $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$?

26. Dowieść, że pochodna różniczkowalnej funkcji okresowej jest okresowa. Czy z okresowości pochodnej f' wynika okresowość funkcji f?

27. Dowieść, że dla każdej liczby $\varepsilon \in [0,1)$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) - \varepsilon \sin f(x) = x$. Wykazać, że funkcja f jest różniczkowalna.

28. Niech $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Załóżmy, że $a < x < \alpha_n < \beta_n < b$ dla każdego n i $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x$. Dowieść, że jeżeli ciąg $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$ jest ograniczony, to zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$. Podać przykład świadczący o istotności założenia ograniczoności ciągu $\left(\frac{\beta_n - x}{\beta_n - \alpha_n}\right)$.