PRĘDKOŚĆ, PRZYSPIESZENIE, STYCZNA

Załóżmy, że pewne ciało (punkt materialny) porusza się po prostej. Zakładamy, że na tej prostej została wprowadzona struktura osi liczbowej, tzn. wybrano pewien punkt O, którego współrzędną jest liczba 0, zdefiniowano odcinek jednostkowy i zwrot, co umożliwiło przypisanie każdemu punktowi tej prostej liczby rzeczywistej dodatniej lub ujemnej w znany sposób. Załóżmy, że w chwili t poruszające się ciało znajduje się w punkcie o współrzędnej $s(t)$.

W okresie od t_0 do t ciało przebyło drogę $s(t) - s(t_0)$. Jego średnia prędkość w okresie od t_0 do t jest równa $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$. Zarówno licznik jak i mianownik tego ułamka mogą być dodatnie lub ujemne, w zależności od tego, w którą stronę obiekt porusza się oraz w zależności od tego czy interesuje nas chwila t następująca po chwili t_0 czy też poprzedzająca ją, może też zdarzyć się, że $s(t_0) = s(t)$, chociaż $t \neq_0$.

Na ogół ruch odbywa się ze zmienną prędkością. Często interesuje nas prędkość w jakiejś chwili, a średnia ma znaczenie drugorzędne. W normalnych warunkach im mniejsza liczba $|t - t_0|$ tym średnia prędkość jest bardziej zbliżona do chwilowej. Rozsądnie jest więc powiedzieć, że prędkość chwilowa w momencie t_0 jest równa $v(t_0) := \lim\limits_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

Podobnie można mówić o przyspieszeniu. Jeżeli prędkość w okresie od t_0 do t zmieniła się o $v(t)-v(t_0)$, to średnia zmiana prędkości w tym czasie, czyli średnie przyspieszenie, była równa $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$. Na ogół przyspieszenie zmienia się w czasie. Często interesuje nas przyspieszenie chwilowe: $a(t) := \lim\limits_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$.

Oczywiście nie dla każdej funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ istnieją granice $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Oznacza to , że istnieją funkcje $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które w sposób podany przez nas nie opisują żadnego realnego ruchu.

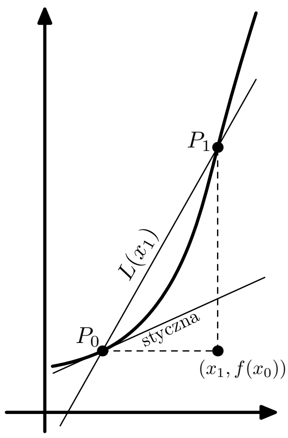
Jeśli np. $s(t) = a + bt$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to mamy do czynienia z ruchem o stałej prędkości chwilowej $b = \frac{(a+bt)-(a+bt_0)}{t-t_0}$, w chwili 0 ciało znajdowało się w punkcie o współrzędnej a.

Jeśli dla odmiany $s(t) = a + bt + ct^2$, to średnia prędkość jest równa $\frac{(a+bt+ct^2)-(a+bt_0+ct_0^2)}{t-t_0} = b + c(t + t_0)$, więc $v(t_0) = b + 2ct_0$. Ponieważ, $v(t) = b + 2ct$, więc średnie przyspieszenie jest równe $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} = 2c$, zatem nie zależy od t ani od t_0. Wobec tego w tym ruchu przyspieszenie chwilowe jest stale równe $2c$.

Czytelnik zapewne pamięta, że prostą styczną do okręgu lub po prostu styczną do okręgu definiuje się zwykle jako prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem. W ten sam sposób można zdefiniować styczną do elipsy. Gdybyśmy jednak zechcieli w taki sposób zdefiniować styczną do paraboli, to okazałoby się, że w każdym punkcie są dwie styczne: ta prawdziwa styczna i prosta równoległa do osi symetrii paraboli, np. styczną do paraboli $y = x^2$ w punkcie $(0, 0)$ byłaby prosta $y = 0$, ale również prosta $x = 0$. Tej drugiej oczywiście nie chcemy nazywać styczną. Jeszcze gorzej byłoby z funkcją $\sin\left(x^2\right)$, bo intuicja domaga się by prosta $y = 0$ była styczną do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, 0)$, ale ta prosta wykres funkcji przecina w nieskończenie wielu punktach, w każdym postaci $(\pm\sqrt{n\pi}, 0)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Jest to spowodowane niewłaściwym spojrzeniem na problem. Styczna do wykresu w pewnym jego punkcie ma się w pobliżu tego punktu nieomal pokryć z wykresem funkcji. Tymczasem warunek *ma dokładnie jeden punkt wspólny* ma charakter globalny, a nie lokalny. Jeśli Czytelnik zechce przyjrzeć się funkcji zdefiniowanej wzorami $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, której wykres leży między wykresami funkcji $-x^2$ i x^2, to zapewne dojdzie do wniosku, że styczną do tego wykresu w punkcie $(0, 0)$ powinna być wspólna styczna do wykresów obu funkcji $-x^2$ i x^2 w tym punkcie, więc prosta $y = 0$. Ta prosta ma jednak nieskończenie wiele punktów wspólnych w wykresem funkcji f, mianowicie punktów postaci $(\frac{1}{n\pi}, 0)$, gdzie $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i ta sytuacja nie zmieni się, jeśli zmniejszymy je dziedzinę do przedziału $(-\delta, \delta)$ niezależnie od tego, jak małą liczbą dodatnią będzie δ.

Spojrzymy więc na definicje stycznej nieco inaczej. Będziemy szukać stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P_0 = \big(x_0, f(x_0)\big)$. Przez ten punkt i drugi punkt wykresu $P_1 = \big(x_1, f(x_1)\big)$ poprowadzimy prostą $L(x_1)$ i spróbujemy zrozumieć, co się z nią dzieje, gdy zbliżamy punkt $\big(x_1, f(x_1)\big)$ do punktu $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Prostą $L(x_1)$ opisujemy równaniem: $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0) + f(x_0)$. Nasz problem polega na ustaleniu,



co się dzieje ze współczynnikiem kierunkowym tej prostej, czyli z liczbą $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Jeżeli funkcja jest w miarę porządna, to można oczekiwać, że istnieje granica $\lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Oznaczmy: $k = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Równanie $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ powinno opisywać styczną. Przypomnijmy, że liczba $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ to tangens kąta zorientowanego między dodatnią półosią OX i prostą $y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}x$, są dwa takie kąty, ale ich tangensy są równe. Wobec tego liczba k to tangens kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią półoś OX i prostą $y = kx$ równoległą do stycznej.

Przykład 21.1 Przyjrzyjmy się opisanej procedurze w przypadku okręgu. Okrąg nie jest wykresem funkcji, ale odpowiednio wybrany półokrąg już jest. Niech $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Wykresem tej funkcji jest „górny" półokrąg, którego środkiem jest punkt $(0,0)$ a promieniem liczba $r > 0$. Niech $x_0 \in (-r, r)$. Mamy wtedy

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{r^2-x^2}-\sqrt{r^2-x_0^2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(r^2-x^2)-(r^2-x_0^2)}{(x-x_0)(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x_0^2})}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{-(x+x_0)}{\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x_0^2}}=\frac{-x_0}{\sqrt{r^2-x_0^2}}\,.$$

Równanie stycznej w punkcie $(x_0,\sqrt{r^2-x_0^2})$ wygląda więc tak: $y=\frac{-x_0}{\sqrt{r^2-x_0^2}}(x-x_0)+\sqrt{r^2-x_0^2}$. Bez trudu można sprawdzić, że jedynym jej punktem wspólnym z okręgiem $x^2+y^2=r^2$ jest punkt $\big(x_0,\sqrt{r^2-x_0^2}\big)$. Oznacza to, że prosta znaleziona w sposób przez nas opisany jest styczną do okręgu w zwykłym sensie.

Jeśli $x_0=r$, to należałoby rozpatrywać granicę

$$\lim_{x\to r^-}\frac{\sqrt{r^2-x^2}-0}{x-r}=-\infty\,.$$

W zasadzie nie umożliwia to napisania równania prostej, bo współczynnik kierunkowy musi być liczbą, ale mniej formalne spojrzenie mówi, że styczna w punkcie $(r,0)$ powinna być pionowa — kąt jaki prosta przechodząca przez punkt $(r,0)$ i punkt $(x,\sqrt{r^2-x^2})$ dąży do $-\frac{\pi}{2}$ (w radianach!), więc w granicy ma być równy $-\frac{\pi}{2}$, a to oznacza, że styczna w punkcie $(r,0)$ ma być prostopadła do osi OX. Podobne rozumowanie przekonuje nas, że również styczna w punkcie $(-r,0)$ ma być pionowa. ■

Przykład 21.2 Zajmijmy się jeszcze parabolą $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Niech x_0 oznacza dowolną liczbą rzeczywistą i niech $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. Znajdziemy równanie stycznej do paraboli w punkcie (x_0,y_0). Mamy znaleźć współczynnik kierunkowy stycznej, czyli granicę

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(ax^2+bx+c)-(ax_0^2+bx_0+c)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\big(a(x+x_0)+b\big)=2ax_0+b\,.$$

Wynika stąd, że równanie poszukiwanej stycznej powinno wyglądać tak: $y=(2ax_0+b)(x-x_0)+y_0$. Można przekonać się, że jedynym punktem wspólnym tej prostej i paraboli $y=ax^2+bx+c$ jest punkt (x_0,y_0). Oczywiście ta prosta nie jest pionowa, więc nie jest równoległa do osi symetrii paraboli. ■

Czytelnik powinien przekonać się o tym, że styczna do wykresu funkcji $ax + b$ w dowolnym punkcie pokrywa się z tym wykresem, co przecież jest oczekiwanym rezultatem: styczną do prostej jest (powinna być) ona sama.

Definicja 21.1 (kąta między krzywymi)
Kąt między krzywymi, to z definicji kąt między stycznymi do tych krzywych w ich punkcie wspólnym. ■

Zadania

1. Znaleźć równanie prostej stycznej do elipsy zdefiniowanej równaniem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie (x_0, y_0), $x_0 \in (-a, a)$.

2. Udowodnić, że istnieją takie dwa punkty A, B, że jeśli promień światła przechodzi przez punkt A i odbija się od zwierciadła eliptycznego o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zgodnie z prawem *,,kąt padania równy jest kątowi odbicia"*, to promień odbity przechodzi przez punkt B.

3. Dowieść, że wykres wielomianu stopnia drugiego o dodatnim wyróżniku przecina poziomą oś układu współrzędnych pod kątami, których suma jest równa π.

4. W ilu punktach i pod jakimi kątami przecinają się parabole o równaniach $y = x^2$ i $x = y^2$?

5. Znaleźć warunek na liczby p, q na to, by wykres wielomianu $x^3 + px + q$ był styczny do osi OX w pewnym jej punkcie.

6. Dla jakiej liczby rzeczywistej a istnieje taka liczba rzeczywista b, że styczne do wykresów funkcji ax^2 i $\ln x$ mają w punkcie $(b, ab^2) = (b, \ln b)$ wspólną styczną?

7. Dowieść, że krzywe o równaniach $x^2 - y^2 = a$ i $xy = b$ przecinają się pod kątem prostym, czyli że styczne do nich w punktach przecięcia są prostopadłe.