CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE I

W wielu przypadkach mamy do czynienia z ciągami, których wyrazami są w istocie rzeczy funkcje. Opowiemy teraz pokrótce o dwóch najważniejszych rodzajach zbieżności. Rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych jest więcej, ale na razie wystarczy nam problemów z dwoma.

Niech A będzie niepustym zbiorem i niech dla każdej liczby naturalnej n będzie określona funkcja $f_n\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$. Dla każdego $x \in A$ jest więc określony ciąg liczbowy $\big(f_n(x)\big)$. Mówimy wtedy o *ciągu funkcyjnym* (f_n).

Możemy też mówić o szeregu funkcyjnym $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Dla każdego $x \in A$ określony jest wtedy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Jeśli (f_n) i (g_n) są ciągami funkcyjnymi określonymi na tym samym zbiorze A, $h\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, to ciągi $(f_n + g_n)$ $(f_n - g_n)$, $(f_n \cdot g_n)$ nazywamy odpowiednio sumą, różnicą i iloczynem ciągów (f_n) i (g_n), ciąg (hf_n) — iloczynem ciągu (f_n) przez funkcję h. Jeżeli dla każdego $x \in A$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $g_n(x) \neq 0$, to możemy określić iloraz $\left(\frac{f_n}{g_n}\right)$ ciągów (f_n) i (g_n).

Podobnie określamy sumę $\sum(f_n + g_n)$ i różnicę $\sum(f_n - g_n)$ szeregów $\sum f_n$ i $\sum g_n$ oraz iloczyn $\sum hf_n$ szeregu $\sum f_n$ przez funkcję h.

Definicja 20.1 (punktowej zbieżności)
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym określonym na zbiorze A i niech $x \in A$. Mówimy, że ciąg (f_n) jest zbieżny w punkcie x, jeśli ciąg liczbowy $f_n(x)$ jest zbieżny. Granicą ciągu (f_n) jest taka funkcja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, że $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in A$. Funkcję f nazywamy wtedy punktową granicą ciągu (f_n).

Szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest zbieżny w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum f_n(x)$ jest zbieżny. Jeżeli dla każdego $x \in A$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny i jego sumą jest liczba $s(x)$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest punktowo zbieżny do sumy s

na zbiorze A. Piszemy wtedy $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, a funkcję $s\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. ■

Jest jasne, że jeśli granica ciągu funkcyjnego istnieje, to tylko jedna.

Przykład 20.1 Niech $f_n(x) = x^n(1-x)$ dla $x \in [0,1]$. Jasne jest, że dla każdego $x \in [0,1]$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Oznacza to, że na przedziale $[0,1]$ ciąg (f_n) jest zbieżny do funkcji zerowej.

Przykład 20.2 Niech $f_n(x) = n!x - \lfloor n!x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$. Jasne jest, że jeśli x jest liczbą wymierną, to dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n liczba $n!x$ jest całkowita, zatem zachodzi równość $f_n(x) = 0$. Czytelnik sprawdzi, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(e) = 0$. Można bez trudu udowodnić, że $\frac{e}{2} = 1 + \frac{2}{3!} + \frac{3}{5!} + \frac{4}{7!} + \frac{5}{9!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)!}$ i stąd wywnioskować, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n-1}\big(\frac{e}{2}\big) = 0$ i jednocześnie $\lim\limits_{n\to\infty} f_{2n}\big(\frac{e}{2}\big) = \frac{1}{2}$. Można również zauważyć, że jeśli $x = a_1 + \frac{1}{2!}a_2 + \frac{1}{3!}a_3 + \cdots$, gdzie $a_j \in \mathbb{Z}$ dla $j = 1,2,\ldots$ przy czym $0 \leqslant a_j \leqslant j-1$ dla $j = 2,3,\ldots$ oraz że nierówność $a_j \leqslant j-1$ jest ostra dla nieskończenie wielu j (por. zad 16.68), to granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{n+1}$. Granice te są równe. ■

Przykład 20.3 Niech $x \in [-1,1]$ i niech $f_1(x) = 0$ oraz $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - f_n^2(x)\big)$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ dla każdego $x \in [-1,1]$.

Wykażemy najpierw, że $0 \leqslant f_n(x) \leqslant |x|$ i $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ dla każdego $x \in [-1,1]$ i każdego $n = 0,1,2,\ldots$. Zastosujemy indukcję. Dla $n = 0$ nierówności zachodzą: $0 \leqslant f_0(x) = 0 \leqslant |x|$ i $f_0(x) \leqslant f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$. Jeśli są spełnione dla pewnego n, to $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big)\big(|x| + f_n(x)\big) \geqslant f_n(x)$, bo na mocy założenia indukcyjnego $|x| + f_n(x) \geqslant |x| - f_n(x) \geqslant 0$. Stąd $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big)\big(|x| + f_n(x)\big) \leqslant$

$$\leqslant f_n(x) + \tfrac{1}{2}\big(|x| - f_n(x)\big) \cdot 2|x| \leqslant f_n(x) + |x| - f_n(x) = |x|\,,$$

a to jest teza indukcyjna. Z tego, co udowodniliśmy wynika, że dla każdego $x \in [-1,1]$ ciąg $(f_n(x))$ jest niemalejący i ograniczony: z góry przez $|x|$, z dołu — przez 0. Ma więc granicę.

Niech $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Oczywiście $g(x) \geqslant 0$. Z wzoru $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - f_n^2(x)\big)$ i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy wynika, że $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - g^2(x)\big)$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) = |x|$. Zauważmy jeszcze, że funkcja f_n jest wielomianem zmiennej x (stopnia 2^n). ■

Przykład 20.4 Niech $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Udowodnimy, że ciąg $(f_n(x))$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą. Jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $f_n(x) = \sin(n\pi x) = 0$. Jeśli $x = \frac{p}{q}$, gdzie $g \geqslant 1$ i p są liczbami całkowitymi. Wtedy ciąg $(f_n(x))$ jest okresowy, jego okresem jest $2q$. Taki ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest stały, a to ma miejsce jedynie wtedy, gdy $q = 1$ (zakładamy, że $\mathrm{nwd}(p,q) = 1$). Jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\big(nx - \lfloor nx \rfloor\big)$. Stąd, z wzorów redukcyjnych i ciągłości funkcji sinus wynika, że każda liczba z przedziału $[-1,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\big(\sin(n\pi x)\big)$. ■

Na zakończenie zapiszemy, że funkcja f jest granicą punktową ciągu (f_n) za pomocą kwantyfikatorów:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \iff \forall_{x\in A}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_{x,\varepsilon}}\forall_{n>n_{x,\varepsilon}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Liczbę $n_{x,\varepsilon}$ dobieramy do x i do ε. Jeśli można ją dobierać do liczby ε niezależnie od x, to mówimy, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

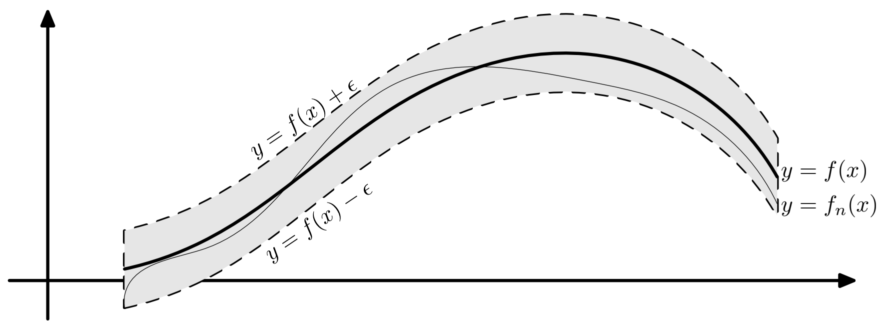
Definicja 20.2 (jednostajnej zbieżności)
Ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze A jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum \varphi_n$ jest jednostajnie zbieżny, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny jednostajnie. ■

Czasem zamiast pisać, że ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f piszemy $f_n \rightrightarrows f$ lub $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$, gdy chcemy podkreślić, że chodzi o zbieżność na zbiorze A. Czytelnik widzi, że definicje zbieżności punktowej i zbieżności jednostajnej różnią się jedynie kolejnością występowania kwantyfikatorów.

Zbieżność jednostajną można zinterpretować geometrycznie: w krzywoliniowym pasie ograniczonym wykresami funkcji $f(x)-\varepsilon$ i $f(x)+\varepsilon$ leżą wykresy prawie wszystkich funkcji $f_1, f_2, \ldots$



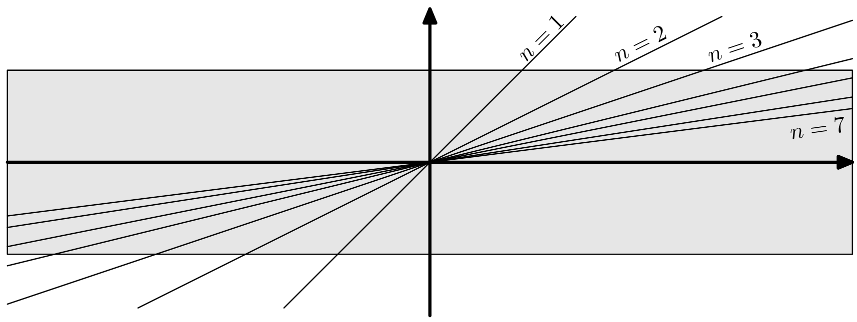
Uwaga 20.3
Jeśli ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f, to jest też zbieżny punktowo do funkcji f. ■

Wniosek 20.4
Jeśli istnieje taki ciąg liczb dodatnich (ε_n) zbieżny do 0, że dla każdej liczby $x \in A$ spełniona jest nierówność $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_n$, to $f_n \rightrightarrows f$. ■

Uwaga 20.5
Ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon\ x \in A\} = 0$. ■

Przykład 20.5 Ciąg funkcyjny $\left(\frac{x}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ określony na $\mathbb{R}$ jest zbieżny punktowo do funkcji zerowej, ale nie jest zbieżny jednostajnie.

Oczywiście dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$. Ze zbieżności jednostajnej wynikałoby istnienie takiej liczby n_1, że dla każdego $n > n_1$ i każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodziłaby nierówność $\left|f_n(x) - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| < 1$. Dla $x = 2n$ otrzymalibyśmy $2 = \frac{2n}{n} < 1$.



Proste $y = \frac{x}{n}$ dla kolejnych n

Po prostu odchodząc dostatecznie daleko od punktu $x = 0$ punkt na wykresie funkcji $\frac{x}{n}$ znajdzie się w odległości większej od 1 od osi OX, więc wykres funkcji $\frac{x}{n}$ nie zmieści się w pasie ograniczonym prostymi równoległymi do osi OX.

Ciąg $\left(\frac{x}{n}\right)$ jest jednostajnie zbieżny na każdym przedziale postaci $[-r, r]$, $r > 0$, bo jeśli $x \in [-r, r]$. to $\left|\frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{r}{n} < \varepsilon$, dla każdego $n > \frac{r}{\varepsilon}$. Wynika stąd, że ciąg $\left(\frac{x}{n}\right)$ jest zbieżny na każdym ograniczonym przedziale $[a, b]$, bo każdy taki przedział jest zawartym w przedziale postaci $[-r, r]$, $r > 0$. ■

Przykład 20.6 Ciąg funkcyjny $\big(x^n(1 - x^n)\big)$ jest zbieżny do funkcji zerowej na przedziale $[0, 1]$, ale nie jest do niej zbieżny jednostajnie. Zbieżność wynika z nierówności $0 \leqslant x^n(1-x^n) \leqslant x^n$ dla $0 \leqslant x < 1$ oraz tego, że w punkcie 1 wszystkie funkcje tego ciągu zerują się. Ciąg nie jest zbieżny jednostajnie, bo dla $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ i dowolnego naturalnego n, mamy $x^n(1 - x^n) = \frac{1}{4}$. ■

Przykład 20.7 Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest zbieżny punktowo na przedziale $(-1, 1)$ do funkcji $\frac{1}{1-x}$. Zbieżność ta nie jest jednostajna, ale na każdym przedziale **domkniętym** zawartym w $(-1, 1)$ zbieżność jest jednostajna.

Mamy $\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{k+1}}{1-x} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$, bowiem $\lim\limits_{k\to\infty} x^{k+1} = 0$, gdy $|x| < 1$.

Jeśli $|x| \leqslant c < 1$, to $\left|\frac{x^{k+1}}{1-x}\right| \leqslant \frac{c^{k+1}}{1-c} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, co dowodzi jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego na przedziale $[-c, c]$, a każdy domknięty przedział zawarty w przedziale $(-1, 1)$ jest zawarty w pewnym przedziale postaci $[-c, c]$, $c > 0$.

Z jednostajnej zbieżności szeregu na przedziale $(-1,1)$ wynikałoby, że $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\{\frac{x^{k+1}}{1-x}:\quad x\in(-1,1)\}=0$. Tak jednak nie jest, bo przy ustalonym $k\in\mathbb{N}$ mamy $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^{k+1}}{1-x}=\infty$. ■

Uwaga 20.6 W końcówce poprzedniego przykładu można było podstawić np. $x=1-\frac{1}{2(k+1)}$. Wtedy (nierówność Bernoulliego) $\frac{x^{k+1}}{1-x}=2(k+1)\big(1-\frac{1}{2(k+1)}\big)^{k+1}\geqslant 2(k+1)\big(1-\frac{1}{2}\big)=k+1$. ■

Podobnie jak w przypadku ciągu liczbowego w badaniu jednostajnej zbieżności ważną rolę pełni

Twierdzenie 20.7 (warunek Cauchy'ego zbieżności jednostajnej) Ciąg funkcyjny (f_n) jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m>n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\,.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}g_n$ jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{m\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in A}\Big|\sum_{k=n}^{m}g_k(x)\Big|<\varepsilon\,.$$

Dowód. Jeśli (f_n) jest ciągiem funkcyjnym jednostajnie zbieżnym na zbiorze A do funkcji f i $\varepsilon>0$, to istnieje taka liczba $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, że jeśli $n>n_\varepsilon$, to $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Jeśli również $m>n_\varepsilon$, to zachodzi nierówność

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Wykazaliśmy, że jednostajnie zbieżny ciąg funkcyjny spełnia warunek Cauchy'ego.

Załóżmy, że ciąg funkcyjny (f_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Wtedy dla każdego $x\in A$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ spełnia warunek Cauchy'ego, więc ma granicę skończoną. Niech $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Zdefiniowaliśmy funkcję $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}$. To kandydatka na granicę jednostajną ciągu (f_n). Niech $\varepsilon>0$. Istnieje takie $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, że

$$\text{jeśli } m,n>n_\varepsilon\text{, to } |f_m(x)-f_n(x)|<\tfrac{5}{6}\varepsilon\,.$$

Wobec tego $|f(x)-f_n(x)|=\lim\limits_{m\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant\frac{5}{6}\varepsilon<\varepsilon$, co dowodzi tej części tezy.

Dla szeregów twierdzenie wynika z tego, że ciąg sum częściwych musi spełniać warunek Cauchy'ego dla ciągów. ■

Z tego twierdzenia wynika

Twierdzenie 20.8 (kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej)
Niech $\sum g_n$ będzie szeregiem funkcyjnym określonym na zbiorze A. Jeśli istnieje taki szereg zbieżny $\sum a_n$, że dla każdego $x \in A$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $|g_n(x)| \leqslant a_n$, to szereg $\sum g_n$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze A. Jest też zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie zbioru A. ■

Przykład 20.8 Jeśli szereg funkcyjny [20.1] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w punkcie $\mathbf{x} \neq 0$ i $0 < r < |x_0|$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[-r, r]$.

Ciąg $\left(a_n x_0^n\right)$ jest zbieżny do 0, więc jest ograniczony, tzn. istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\left|a_n x_0^n\right| \leqslant M$. Jeżeli $|x| \leqslant r < |x_0|$, to $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$, więc jednostajna zbieżność szeregu $\sum a_n x^n$ na przedziale $[-r, r]$ wynika z kryterium Weierstrassa. ■

Twierdzenie 20.9 (o ciągłości granicy)
Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest ciągła w punkcie x_0.

Dowód. Niech (f_n) będzie ciągiem jednostajnie zbieżnym do funkcji f na zbiorze A. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Mamy

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x)|.$$

Dla każdej dostatecznie dużej liczby naturalnej n, dla wszystkich $x \in A$ zachodzi nierówność $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Niech n będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną. Ponieważ funkcja f_n jest ciągła w punkcie x_0, więc istnieje taka liczba $\delta_n > 0$, że jeśli $|x - x_0| < \delta_n$, to $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Stąd i z poprzedniej nierówności otrzymujemy $|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, więc dowód ciągłości funkcji f w punkcie x_0 został zakończony. ■

Przykład 20.9 Ciąg (x^n) jest zbieżny na przedziale $[0, 1]$ do

[20.1] Szeregi, o jakich mówimy w tym przykładzie, nazywane są potęgowymi.

funkcji f, zdefiniowanej wzorami $f(1) = 1$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in [0,1)$. Granica jest nieciągła w punkcie 1, więc zbieżność nie jest jednostajna. ■

Twierdzenie 20.10
Suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest ciągła. ■

Wniosek 20.11
Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ jest zbieżny w punkcie $x_0 \neq 0$, to funkcja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału $(-|x_0|, |x_0|)$

Dowód. Niech $x_1 \in (-|x_0|, |x_0|)$. Niech $r \in (|x_1|, |x_0|)$. Każda z funkcji $a_n x^n$ jest ciągła w punkcie $x_1 \in (-r, r)$, a szereg tych funkcji jest jednostajnie zbieżny na przedziale $[-r, r]$. Stąd wynika teza. ■

Uwaga 20.12 Z dowodu twierdzenia o ciągłości granicy wynika, że jeśli ciąg funkcji **jednostajnie** ciągłych jest jednostajnie zbieżny, to jego granica jednostajnie ciągła. ■

Pokazaliśmy już przykład punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych, którego granica ma punkt nieciągłości. Wyjaśnienie jakie funkcje są granicami ciągów punktowo zbieżnych na przedziale jest problemem dosyć złożonym i wykracza poza ramy tej książki. Istnieją funkcje, które granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych nie są. Można np. dowieść, że granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na pewnym przedziale ma punkty ciągłości, więc np. funkcja Dirichleta, która punktów ciągłości nie ma, nie może być przedstawiona jako granica punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych. Funkcje monotoniczne są granicami punktowo zbieżnych ciągów funkcji ciągłych.

Przykład 20.10 Niech $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \big(\cos(n!\pi x)\big)^{2m}$. Wszystkie funkcje $\big(\cos(n!\pi x)\big)^{2m}$ są ciągłe. Funkcja f_n ma punkty nieciągłości, bo przyjmuje jedynie wartości 0 (np. dla $x = 0$) i 1 (np. dla $x = \sqrt{2}$). Czytelnik sprawdzi, że granicą ciągu (f_n) jest funkcja Dirichleta, która punktów ciągłości nie ma. ■

Zajmiemy się się teraz przybliżaniem funkcji ciągłych prostymi funkcjami. Najpierw udowodnimy, że każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych, a później, że jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.

Zaczniemy od podania definicji.

Definicja 20.13 (funkcji przedziałami liniowej)
Funkcję $L\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy przedziałami liniową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie punkty

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

że równość $L(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$ zachodzi dla każdego $x \in [x_{i-1}, x_i]$, czyli że na każdym przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ funkcja L jest wielomianem stopnia nie większego niż 1, a takie wielomiany często nazywamy funkcjami liniowymi. ■

Z definicji wynika od razu, że funkcja przedziałami liniowa jest ciągła w każdym punkcie przedziału $[a,b]$.

Przykład 20.11 Funkcje $|x|$, $x-17+2|x-\sqrt{7}|$ są przedziałami linowe na każdym przedziale. ■

Można łatwo stwierdzić, że suma funkcji przedziałami liniowych oraz iloczyn funkcji przedziałami liniowej przez liczbę są funkcjami przedziałami liniowymi. Wynika stąd, że każda funkcja postaci $ax+b+a_1|x-x_1|+a_2|x-x_2|+\cdots+a_n|x-x_n|$ jest przedziałami liniowa. Czytelnik zechce wykazać, że każda funkcja przedziałami liniowa na przedziale domkniętym jest tej postaci.

Jeśli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ są punktami przedziału $[a,b]$ a $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to istnieje taka przedziałami liniowa funkcja L, że $L(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Określamy ją za pomocą wzoru $L(x) = y_{i-1} + \frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})$ dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z tego stwierdzenia wynika, że jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ są punktami przedziału $[a,b]$, to istnieje taka funkcja przedziałami liniowa L, że $L(x_i) = f(x_i)$ dla $i - 0, 1, \ldots, n$. Pozwala to na przedstawienie dowolnej funkcji ciągłej na przedziale domkniętym jako granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji przedziałami liniowych.

Lemat 20.14 (**o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi**) Jeśli $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje ciąg (L_n) funkcji przedziałami liniowych jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ i dowolnej liczby $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zdefiniujemy $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$. Zdefiniowane właśnie punkty dzielą przedział $[a,b]$ na n równych przedziałów. Niech $f_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wykażemy, że $f_n \rightrightarrows f$ na przedziale $[a,b]$. Niech ε będzie liczbą dodatnią. Funkcja f jest ciągła na domkniętym przedziale, więc jest też jednostajnie ciągła. Istnieje więc taka liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_\varepsilon$ i $|x' - x''| < \frac{b-a}{n}$ oraz $x', x'' \in a, b$, to zachodzi nierówność $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Wykażemy, że $|L_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Załóżmy, że $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$. Niech $t = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$. Mamy wtedy $x = tx_{i-1} + (1-t)x_i$. Ponieważ funkcja L_n jest liniowa na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$, więc

$$L_n(x) = tL_n(x_{i-1}) + (1-t)L_n(x_i) = tf(x_{i-1}) + (1-t)f(x_i).$$

Mamy też $f(x) = tf(x) + (1-t)f(x)$. Wobec tego

$$|L_n(x) - f(x)| = \big|t\big(f(x_{i-1}) - f(x)\big) + (1-t)\big(f(x_i) - f(x)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant t\big|f(x_{i-1}) - f(x)\big| + (1-t)\big|f(x_i) - f(x)\big| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

bo $|x - x_{i-1}| \leqslant \frac{b-a}{n}$ i $|x - x_i| \leqslant \frac{b-a}{n}$. Otrzymana nierówność kończy dowód jednostajnej zbieżności ciągu (L_n) do funkcji f. ■

W praktyce często wykonywane są przybliżone wykresy bardzo złożonych funkcji. Najprostsza metoda to: znajdujemy pewną liczbę punktów na wykresie i łączymy je odcinkami prostych (we właściwej kolejności). Powstała łamana przybliża poszukiwany wykres, jeśli mamy do czynienia z funkcją ciągłą. Przybliżenie jest tym dokładniejsze im ,,gęściej'' wybierzemy punkty na wykresie — wynika to z dowodu twierdzenia o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi.

Można zastąpić funkcje przedziałami liniowe innymi, np. wielomianami. Jeśli $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ i $y_0, y_1, \ldots, y_n$ są liczbami rzeczywistymi, to istnieje dokładnie jeden taki wielomian w_n stopnia nie większego niż n, że $y_i = w_n(x_i)$ dla każdego $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Nazywany jest n–tym wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a. Czytelnik bez trudu stwierdzi, że może on być zdefiniowany wzorem:

$$w_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \tfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1}\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}\ldots(x_i-x_n)} .$$

Dowód jednoznaczności tego wielomianu to całkiem dobre ćwiczenie. Jeśli chcemy przybliżać funkcję ciągłą, to wybieramy punkty $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ w dziedzinie funkcji i przyjmujemy $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.

Niestety istnieją funkcje ciągłe, dla których ciąg wielomianów Lagrange'a nie jest zbieżny do przybliżanej funkcji, choć przy dostatecznie silnych założeniach o funkcji przybliżanej takich kłopotów już nie ma. Pokażemy niebawem, że każda funkcja ciągła na przedziale **domkniętym** jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. Takie ciągi można określać wieloma sposobami. Pokażemy dwa.

Lemat 20.15
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$ jednostajnie zbieżnym do funkcji $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Załóżmy, że dla każdego n dany jest ciąg $(f_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$ jednostajnie zbieżny do funkcji f_n. Istnieje wtedy taki rosnący ciąg (k_n), że ciąg funkcyjny $(f_{n,k_n})_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Niech $a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon \quad x \in [a,b]\}$ oraz $a_{n,k} = \sup\{|f_{n,k}(x) - f_n(x)|\colon \quad x \in [a,b]\}$. Z założeń o ciągach (f_n) i $(f_{n,k})$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Wynika stąd, że istnieje taki rosnący ciąg liczb naturalnych k_n, że $a_{n,k_n} < \frac{1}{n}$. Dla każdego $x \in [a,b]$ zachodzi nierówność

$$|f_{n,k_n}(x) - f(x)| \leqslant |f_{n,k}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_{n,k_n} + a_n .$$

Stąd $\sup\{|f_{n,k_n}(x) - f(x)|\colon \quad x \in [a,b]\} \leqslant a_{n,k_n} + a_n < \frac{1}{n} + a_n$. Z otrzymanej nierówności teza wynika od razu. ■

Lemat 20.16
Istnieje ciąg $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ wielomianów jednostajnie zbieżny na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $|x|$.

Dowód. Niech $w_0(x) = 0$, $w_{n+1} = w_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - w_n^2(x)\big)$. Udowodniliśmy poprzednio (przykład 20.3), że ten ciąg jest niemalejący i zbieżny punktowo na przedziale $[-1,1]$ do funkcji $|x|$. Teraz wykażemy, że zbieżność ta jest jednostajna, czyli że

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_\varepsilon}\forall_{n>n_\varepsilon}\forall_{x\in[-1,1]}\,|x| - w_n(x) < \varepsilon\,.$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taki rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) i taki ciąg (x_{n_k}) liczb z przedziału $[-1,1]$, że $|x_{n_k}| - w_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$. Zastępując w razie potrzeby ciąg (x_{n_k}) jego podciągiem możemy założyć, że istnieje granica $g = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Oczywiście $-1 \leqslant g \leqslant 1$. Ponieważ dla każdego $x \in [-1,1]$ ciąg $\big(w_n(x)\big)$ jest niemalejący, więc jeżeli $k < \ell$, to

$$w_{n_k}(x_{n_\ell}) \leqslant w_{n_\ell}(x_{n_\ell})\,.$$

Stąd wynika, że jeśli $k < \ell$, to

$$|x_{n_\ell}| - w_{n_k}(x_{n_\ell}) \geqslant |x_{n_\ell}| - w_{n_\ell}(x_{n_\ell}) \geqslant \varepsilon\,,$$

zatem $|x_{n_\ell}| - w_{n_k}(x_{n_\ell}) \geqslant \varepsilon$ Z ciągłości funkcji w_{n_k} wynika, że zachodzi nierówność $|g| - w_{n_k}(g) \geqslant \varepsilon$. Ta nierówność przeczy temu, że $\lim\limits_{k\to n_k} w_{n_k}(g) = |g|$. Lemat został udowodniony. ■

Uwaga 20.17
Powtarzając dowód lematu w nieco ogólniejszej wersji można udowodnić, że: jeśli ciąg (f_n) funkcji ciągłych na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest w każdym punkcie tego przedziału niemalejący lub nierosnący i punktowo zbieżny do funkcji ciągłej, to zbieżność jest jednostajna. ■

Czytelnik z łatwością zauważy, że funkcję $|x|$ można przybliżać jednostajnie na dowolnym przedziale domkniętym. Stąd wynika, że każdą funkcję postaci

$$ax + b + a_1|x-x_1| + a_2|x-x_2| + \cdots + a_n|x-x_n|$$

można przedstawić jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. Z tego stwierdzenia, z lematu o przybliżaniu funkcjami przedziałami liniowymi i z lematu 20.15 wynika

Twierdzenie 20.18 (Weierstrassa o aproksymacji)
Każda funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów. ■

Dowód został tak przeprowadzony, że dosyć trudno z niego uzyskać konkretny ciąg wielomianów jednostajnie zbieżny do danej funkcji. Prosty sposób został podany przez N.S.Bernsteina.

Twierdzenie 20.19 (Bernsteina)
Niech $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $x \in [0,1]$ spełniona będzie równość

$$b_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right)\tbinom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}\,.$$

Wtedy b_n jest wielomianem [20.2] stopnia nie większego niż n i ciąg (b_n) jest jednostajnie zbieżny do funkcji f.

Dowód. Wykażemy, że jeśli liczba n jest dostatecznie duża, to przyjęcie $w(t) = b_n(t)$ powoduje, że dla każdego $t \in [0,1]$ zachodzi nierówność $|f(t) - w(t)| = |f(t) - b_n(t)| < \varepsilon$.

Zaczniemy od trzech pomocniczych równości i nierówności.

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1 \tag{W1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt \tag{W2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} t^k k^2 (1-t)^{n-k} = n(n-1)t^2 + nt \tag{W3}$$

$$\forall_{\delta>0} \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant \tfrac{1}{n}\cdot\tfrac{t(1-t)}{\delta^2} \leqslant \tfrac{1}{4n\delta^2} \tag{W4}$$

Równość (W1) zachodzi, bo $1 = \big(t + (1-t)\big)^n = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.
Równość (W2) podobnie:

$$\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= nt\sum_{k=0}^{n-1} \tbinom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} = nt\big(t + (1-t)\big)^{n-1} = nt\,.$$

Kolej na (W3).

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\tbinom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} +$$

[20.2] zwany n–tym wielomianem Bernsteina funkcji f.

$$+\sum_{k=1}^{n} k\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)t^2\sum_{k=2}^{n}\tbinom{n-2}{k-2}t^{k-2}(1-t)^{n-2-(k-2)} + nt =$$

$$= n(n-1)t^2\sum_{k=0}^{n-2}\tbinom{n-2}{k}t^{k}(1-t)^{n-2-k} + nt =$$

$$= n(n-1)t^2\big(t+(1-t)\big)^{n-2} + nt = n(n-1)t^2 + nt\,.$$

Teraz kolej na najważniejsze z tych czterech stwierdzeń, zwane nierównością Czebyszewa (w przypadku ogólniejszym, na omówienie którego tu nie ma miejsca).

$$n^2\delta^2 \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \big(k-nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} <$$

$$< \sum_{k=0}^{n}\big(k-nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}k^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} -$$

$$-2\sum_{k=0}^{n}knt\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\big(nt\big)^2\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)t^2 + nt - 2n^2t^2 + n^2t^2 = nt - nt^2 = nt(1-t)$$

Z otrzymanej nierówności łatwo wynika, że

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \frac{nt(1-t)}{n^2\delta^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{t(1-t)}{\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}\,.$$

Jesteśmy gotowi do dowodu. Ponieważ f jest ciągła na przedziale *domkniętym*, więc istnieje taka liczba $\delta > 0$, że z nierówności $|t-s| < \delta$ wynika $|f(t)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Istnieje też taka liczba $M > 0$, że $|f(t)| \leqslant M$ dla każdego $t \in [0,1]$. Dzięki (W1) mamy:

$$\big|f(t)-b_n(t)\big| = \left|f(t) - \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\Big(f(t)-f\big(\tfrac{k}{n}\big)\Big)\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta} \big|f(t)-f\big(\tfrac{k}{n}\big)\big|\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \left|f(t) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right|\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|<\delta} \tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\geqslant\delta} \tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + 2M\tfrac{1}{4n\delta^2} = \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{M}{2n\delta^2}$$

Jeśli $n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$, to $\left|f(t) - b_n(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 20.20 (krótki komentarz probabilistyczny.)

Załóżmy, że w Nibylandii (pozdrowienia od Piotrusia Pana) wyprodukowano monetę niecałkiem symetryczną: rzucając nią otrzymujemy reszkę z prawdopodobieństwem t, a drugą stronę — z mało czytelną podobizną jakiegoś fruwającego stworzenia — z prawdopodobieństwem $1-t$. Prawdopodobieństwo uzyskania w n rzutach tą monetą dokładnie k–reszek równe jest $\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$. Wobec tego liczba $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = nt$ oznacza średnią liczbę reszek otrzymanych w k rzutach tą monetą. Oczekujemy więc, że rzucając tą monetą n razy otrzymamy nt, a raczej około nt, reszek. Wzór (W4) wyjaśnia, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba rzutów (k), w których wypadła reszka, będzie różnić się od liczby oczekiwanej (nt) o pewien ustalony procent liczby rzutów lub jeszcze bardziej. Dlatego zajmujemy się tam różnicą $\left|\frac{k}{n} - t\right|$ ($\left|\frac{k}{n} - t\right| \geqslant \delta \Leftrightarrow |k - nt| \geqslant \delta n$, ta ustalona część liczby n to δn). Prawdopodobieństwo to dąży do 0 — jest to tzw. słabe prawo wielkich liczb. Liczba $b_n(t)$ jest więc średnią liczb $f\left(\frac{k}{n}\right)$, ta średnia jest mniej więcej równa $f(t)$, bo na ogół $\frac{k}{n} \approx t$. Powinna więc mieć miejsce następująca równość przybliżona $f(t) \approx b_n(t)$. Końcówka nie jest całkiem precyzyjna, ale wcześniej staraliśmy się wyjaśnić dokładnie, o co chodzi. ■

Uwaga 20.21

Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to ciąg (w_n) wielomianów określonych wzorem $w_n(t) = b_n\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$, gdzie b_n oznacza

n–ty wielomian Bernsteina funkcji φ, którą definiujemy wzorem $\varphi(t) = f\big(a + t(b-a)\big)$, jest jednostajnie zbieżny do funkcji f. ∎

Dodajmy jeszcze, że na ogół n–ty wielomian Bernsteina funkcji f nie pokrywa się z jej n–tym wielomianem Lagrange'a.

Uwaga 20.22
Ponieważ każdy wielomian może być przybliżany jednostajnie na przedziale domkniętym wielomianami o współczynnikach wymiernych, więc każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym jest granicą jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów o współczynnikach wymiernych. ∎

Efektywne przybliżenia wielomianami licznych funkcji można uzyskać przedstawiając je w postaci sum szeregów.

Przykład 20.12 $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (-1,1)$. Korzystając z twierdzenia udowodnionego w przykładzie 20.8 stwierdzamy, że ciąg (w_n) określony wzorem $w_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $\frac{1}{1-x}$ na każdym przedziale o środku w punkcie 0, którego długość jest mniejsza (ostro!) niż 2. ∎

Przykład 20.13 Jak wiadomo $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wobec tego ciąg (w_n) wielomianów zdefiniowany wzorem $w_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji e^x na każdym przedziale domkniętym. ∎

Przykład 20.14 Jak wiadomo $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ i $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Udowodniliśmy to w rozdziale poświęconym trygonometrii. Wobec tego zbieżność ta jest jednostajna na każdym przedziale domkniętym. Pozwala to na efektywne znajdowanie przybliżonych wartości kosinusa i sinusa. Jeśli np. $|x| \leqslant 1$, to

$$\Big|\cos x - \big(1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!}\big)\Big| \leqslant \tfrac{x^8}{8!} \leqslant \tfrac{1}{8!} = \tfrac{1}{40320},$$

a przypominamy, że 1 radian to $\frac{180}{\pi}^\circ \approx 57{,}3^\circ$, więc stosunkowo niewielkim nakładem pracy uzyskujemy dosyć dobre przybliżenie. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że im bliżej zera znajduje się liczba x, tym mniejszy jest błąd względny. Gdy np. $x=\frac{\pi}{6}<\frac{3{,}2}{6}=\frac{1{,}6}{3}$, to błąd jest mniejszy niż $\left(\frac{1{,}6}{3}\right)^8\cdot\frac{1}{40320}=\left(\frac{2{,}56}{9}\right)^4\cdot\frac{1}{40320}<$ $<(0{,}3)^4\cdot\frac{1}{40320}=\frac{9}{44\,800\,000}<\frac{9}{44\,100\,000}=\frac{1}{4\,900\,000}$, co nie jest złą dokładnością w przypadku liczby $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Przykład 20.15 Wykażemy, że jeśli $x\in(-1,1]$, to $\ln(1+x)=$ $=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$. Skorzystamy z tego, że $\lim\limits_{h\to0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$ (zob. przykład 18.6). Mamy więc $\lim\limits_{k\to\infty}k\big(\sqrt[k]{1+x}-1\big)=\ln(1+x)$ dla każdej liczby $x>-1$. Wiemy też, że dla każdego $x\in(-1,1)$ i dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{b}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a+b}{n}x^n.$$

Z tej równości wynika, że $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a/2}{n}x^n\right)^2\geqslant0$ dla każdego $a\in\mathbb{R}$. Stąd i ze wspomnianej równości wynika, że: $\sqrt[k]{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/k}{n}x^n$. Z tego wzoru wynika, że dla każdego $x\in(-1,1)$ i dowolnych $k,n\in\mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}&\Big|k\big(\sqrt[k]{1+x}-1\big)-\\&\quad-\Big[x+(\tfrac{1}{k}-1)\tfrac{x^2}{2!}+\cdots+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n+1)\tfrac{x^n}{n!}\Big]\Big|\leqslant\\&\leqslant\Big|(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n)\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\\&\qquad+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n-1)\tfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\\&\qquad\quad+(\tfrac{1}{k}-1)(\tfrac{1}{k}-2)\ldots(\tfrac{1}{k}-n-2)\tfrac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\cdots\Big|\leqslant\\&\leqslant\tfrac{|x|^{n+1}}{n+1}+\tfrac{|x|^{n+2}}{n+2}+\tfrac{|x|^{n+3}}{n+3}+\cdots=\tfrac{1}{n+1}\big(|x|^{n+1}|x|^{n+2}+|x|^{n+3}+\cdots\big)=\\&=\tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}<\tfrac{1}{(n+1)(1-|x|)}.\end{aligned}$$

Przechodząc do granicy przy $k\longrightarrow\infty$ otrzymujemy nierówność $\Big|\ln(1+x)-\big(x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\big)\Big|\leqslant\frac{1}{(n+1)(1-|x|)}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(1-|x|)}=0$, więc

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

Udowodniliśmy więc równość, którą chcieliśmy wykazać. Z twierdzenia wykazanego w przykładzie 20.8 wynika, że na każdym przedziale domkniętym zawartym w przedziale $(-1,1)$ ta zbieżność jest jednostajna. Załóżmy, że $0 \leqslant x \leqslant 1$. Zachodzą wtedy nierówności $x \geqslant \frac{x^2}{2} \geqslant \frac{x^3}{3} \geqslant \ldots$. Z nich wynika, że $x - \frac{x^2}{2} \leqslant$ $\leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \leqslant \ldots$ oraz $x \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \geqslant \ldots$.

Niech $s_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Wiemy, że ciąg $\big(s_{2n}(x)\big)$ jest niemalejący, a ciąg $\big(s_{2n-1}(x)\big)$ — nierosnący, więc oba mają granice i $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}(x) > -\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}(x) < \infty$. Stąd i z nierówności $|s_n(x) - s_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ wynika, że te granice są równe, więc w szczególności skończone. Niech $s(x) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. Mamy $s_{2n}(x) \leqslant s(x) \leqslant s_{2n-1}(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$, a stąd $0 \leqslant s(x) - s_{2n}(x) \leqslant s_{2n-1}(x) - s_{2n}(x) \leqslant \frac{1}{2n}$ i analogicznie $0 \leqslant s_{2n-1}(x) - s(x) \leqslant s_{2n-1}(x) - s_{2n}(x) \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$. Możemy więc napisać, że $|s(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ dla każdego $x \in [0,1]$, więc szereg jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym $[0,1]$ do funkcji $s(x)$, która jako suma jednostajnie zbieżnego szeregu funkcji ciągłych jest ciągła. Dla $x \in [0,1)$ zachodzi równość $s(x) = \ln(1+x)$. Funkcja $s(x)$ jest ciągła (lewostronnie) w punkcie 1. Również funkcja $\ln(1+x)$ jest ciągła w punkcie 1. Mamy więc $\ln 2 = \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 1^-} s(x) = s(1)$. Udowodniliśmy więc, że $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ ■

W podobny sposób można udowodnić wiele innych wzorów. znane są ogólniejsze metody postępowania. Z niektórymi z nich zapoznamy się w dalszych częściach tej książki. Okaże się, że wzór $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ można wyprowadzić prościej.

Zadania

1. Dowieść, że $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \cdots$.

2. Czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ jest zbieżny?

3. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to zachodzi wzór $\ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right)$.

4. Korzystając z wzoru z poprzedniego zadania obliczyć $\ln 2$ i $\ln 5$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

5. Dowieść, że jeśli $0 < x < \pi$, to $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

6. Niech $a_1 = \sin 1$ i $a_{n+1} = \sin a_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a następnie, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \sqrt{3}$.

7. Dowieść, że jeśli ciąg wielomianów (w_n) jest jednostajnie zbieżny na przedziale domkniętym do funkcji w i istnieje taka liczba M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\operatorname{st} w_n \leqslant M$, to funkcja w jest wielomianem, którego stopień nie przekracza M.

8. Niech $\alpha < 0$. Dla jakich liczb rzeczywistych t szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \cos(2\pi n t)$ jest zbieżny? Na jakich zbiorach zbieżność jest jednostajna?

9. Czy ciąg $nx(1-x)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$?

10. Czy ciąg $\sqrt[n]{1+x^n}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

11. Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

12. Czy ciąg $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$?

13. Czy szereg $\sum \frac{1}{1+(x-n)^2}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

14. Czy szereg $\sum \frac{x^2}{n^4+x^4}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

15. Czy szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,\infty)$?

16! Dowieść, że każda funkcja przedziałami liniowa jest postaci $ax + b + a_1|x-x_1| + a_2|x-x_2| + \cdots + a_n|x-x_n|$.

17. Dowieść, że jeśli funkcja f jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na przedziale domkniętym, to jest też granicą punktowo zbieżnego ciągu wielomianów na tym przedziale.

18! Dowieść, że szereg funkcyjny

$$x(1-x) - x(1-x) + x^2(1-x) - x^2(1-x) + \\ + x^3(1-x) - x^3(1-x) + \cdots$$

jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na przedziale $[0,1]$. Zmienić kolejność wyrazów tego szeregu tak, by nowy szereg nie był zbieżny jednostajnie na $[0,1]$.

19! Niech (f_n) będzie ciągiem ciągiem funkcyjnym określonym na przedziale $[a,b]$. Udowodnić, że jest on jednostajnie zbieżny do funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy z równości $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

20. Wykazać, że granica ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego na *całej prostej* jest wielomianem.

21. Wykazać, że jeśli ciąg funkcji monotonicznych jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej na przedziale domkniętym, to jest zbieżny jednostajnie.

22. Wykazać, że jeśli dla każdego $x \in [a,b]$ ciąg $(f_n(x))$ jest monotoniczny i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, funkcje f, f_1, f_2, ... są ciągłe, to ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[a,b]$ do funkcji f.

23. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych zbieżnego punktowo do funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$, który nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym podprzedziale domkniętym przedziału $[a,b]$.

24. Podać przykład ciągu (f_n) funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie na przedziale $[0,1]$ i jednocześnie zachodzi równość $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f_n(x)| = +\infty$.

25. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ dla każdego $x \notin \mathbb{Z}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

26. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x}e^{-n^2 x}$ dla $x \geqslant 0$. W jakich punktach funkcja f jest ciągła?

27. Niech $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n}$. Wykazać, że funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i wyjaśnić, czy jest okresowa.

28. Udowodnić, że szereg nieujemnych funkcji ciągłych zbieżny punktowo do funkcji ciągłej jest zbieżny jednostajnie.

29. Dowieść, że jeśli $|x| < 1$, to dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$.

30. Dowieść, że jeśli $0 < a < 1$, to dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest nierówność $(x+y)^a < x^a + y^a$.

31. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ dla $x \geqslant 0$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze wszystkich liczb nieujemnych.

32. Dowieść, że dla każdej liczby $a \in (0,1)$ następujące równanie $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = ae^x$ ma dodatni pierwiastek.

33. Obliczyć $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2n^2}$.

34. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\right) = a.$