POTĘGI I LOGARYTMY

Niech $a \neq 0$ będzie liczbą rzeczywistą, n — liczbą całkowitą. Określiliśmy potęgę liczby a wzorami: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla $n = 0, 1, 2\ldots$ oraz $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ dla $n = -1, -2, -3, \ldots$. Spełnione są równości $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ i $(a^m)^n = a^{mn}$ dla dowolnych liczb całkowitych m, n oraz $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{Z}$. Rozszerzymy teraz definicje potęgi definiując najpierw potęgi o wykładniku wymiernym, a potem o wykładniku rzeczywistym. Oczywiście zachowamy ważne własności potęgowania.

Z wymienionych wyżej najważniejsza jest pierwsza, bo pozostałe z niej wynikają. Będziemy więc tak definiować potęgi, by spełniona była równość $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. To natychmiast prowadzi do pewnego ograniczenia: $a = a^1 = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = \left(a^{1/2}\right)^2 \geqslant 0$, zatem podstawa potęgi, jeśli chcemy dopuścić np. wszystkie wymierne wykładniki musi być nieujemna. Nie może ona być równa 0, bo musiałoby wtedy być $0^0 = 1$, więc $1 = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot 0^{-1}$, co jest nie możliwe.

Definicja 18.1
dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ przyjmujemy $0^x = 0$. ■

Nie definiujemy 0^0, ani 0^x dla $x < 0$, by nie mieć problemów z własnościami potęg.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że $a > 0$. Niech $w \in \mathbb{Q}$. Załóżmy, że $q > 0$ i p są takimi liczbami całkowitymi, że $w = \frac{p}{q}$. Powinna być spełniona równość

$$\left(a^w\right)^q = \underbrace{a^w \cdot a^w \cdot \ldots \cdot a^w}_{\text{q czynników}} = a^{qw} = a^p .$$

Oznacza to, że powinniśmy przyjąć, że $a^w = \sqrt[q]{a^p}$. Zauważmy, że liczby wymierne można zapisywać w postaci ilorazu liczby całkowitej i naturalnej na nieskończenie wiele sposobów. Jednak z tego, że $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $s > 0$ i $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ wynika, że $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[s]{a^r}$.

Definicja 18.2 (potęgi o wykładniku wymiernym)
Jeśli $a > 0$, $w = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q > 0$, to potęgą liczby a o wykładniku w nazywamy liczbę $a^w = \sqrt[q]{a^p}$. [18.1] ■

Przykład 18.1 $8^{1/3} = 2$, $2^{1/2} = \sqrt{2}$, $32^{4/5} = 16$, $81^{-2/4} = \frac{1}{9}$, $1048576^{-7/20} = \frac{1}{128}$, $\left(\frac{216}{15625}\right)^{-2/3} = \frac{625}{36}$, $441^{3/2} = 9261$. ■

Dla każdej rzeczywistej liczby dodatniej a definiujemy funkcję $\tilde{f}_a \colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $\tilde{f}_a(w) = a^w$. Z własności potęg o wykładnikach całkowitych i własności pierwiastków wynika

Twierdzenie 18.3
Funkcja $\tilde{f}_a$ ma następujące własności:

18.3.1 Dla dowolnych liczb wymiernych w, i v zachodzi wzór $\tilde{f}_a(w + v) = \tilde{f}_a(w) \cdot \tilde{f}_a(v)$;

18.3.2 $\tilde{f}_a(1) = a$;

18.3.3 jeśli $a > 1$, to funkcja $\tilde{f}_a$ jest ściśle rosnąca, funkcja $\tilde{f}_1$ jest stała, jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\tilde{f}_a$ jest ściśle malejąca.

18.3.4 $\tilde{f}_a(w) > 0$ dla każdej liczby wymiernej w. ■

Z uwag poprzedzających definicję potęgi o wykładniku wymiernym wynika, że funkcja spełniającą warunki 18.3.1 i 18.3.2 jest tylko jedna. Wykażemy, że można ją przedłużyć do funkcji ciągłej na $f_a \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w dokładnie jeden sposób.

Lemat 18.4
Funkcja $\tilde{f}_a$ jest ciągła w punkcie 0.

Dowód. Funkcja $\tilde{f}_a$ jest monotoniczna, **więc istnieją granice jednostronne** $\lim\limits_{x\to 0^+} \tilde{f}_a$ i $\lim\limits_{x\to 0^-} \tilde{f}_a$. Wiemy też, że $\tilde{f}_a(0) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_a(\frac{1}{n})$ i $\tilde{f}_a(0) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_a(-\frac{1}{n})$. Wynika stąd, że obie granice jed-

[18.1] Czytamy a do potęgi w lub po prostu a do w.

nostronne są równe wartości funkcji w punkcie 0, zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie. ■

Lemat 18.5

Funkcja $\tilde{f}_a$ jest jednostajnie ciągła na każdym zbiorze postaci $(c,d)\cap\mathbb{Q}$, gdzie $c,d\in\mathbb{R}$ i $c<d$.

Dowód. Niech $c,d\in\mathbb{R}$. Ponieważ funkcja $\tilde{f}_a$ jest monotoniczna, więc jest ograniczona na każdym zbiorze ograniczonym (jej dziedzina jest nieograniczona!). Istnieje zatem liczba M taka, że dla każdego $w\in(c,d)\cap\mathbb{Q}$ zachodzi nierówność $0<\tilde{f}_a(w)<M$. Niech $v,w\in(c,d)\cap\mathbb{Q}$. Mamy

$$|\tilde{f}_a(v)-\tilde{f}_a(w)|=\tilde{f}_a(w)|\tilde{f}_a(v-w)-1|\leqslant M|\tilde{f}_a(v-w)-\tilde{f}_a(0)|\,.$$

Z tej nierówności i z ciągłości funkcji $\tilde{f}_a$ w punkcie 0 wynika jednostajna ciągłość na zbiorze $(c,d)\cap\mathbb{Q}$. ■

Lemat 18.6

Dla każdej liczby $a>0$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $f_a\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, która jest przedłużeniem funkcji $\tilde{f}_a\colon\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$.

Dowód. Z twierdzenia o przedłużaniu funkcji jednostajnie ciągłej z poprzedniego rozdziału wynika, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ obcięcie funkcji $\tilde{f}_a$ do zbioru $(-n,n)\cap\mathbb{Q}$ można przedłużyć do funkcji ciągłej $g_n\colon[-n,n]\longrightarrow\mathbb{R}$. Z jednoznaczności przedłużenia wynika, że jeśli $m>n$ i $|x|\leqslant n$, to $g_m(x)=g_n(x)$.[18.2] Przyjmujemy $f_a(x)=g_n(x)$ dla $n\geqslant|x|$. Ciągłość funkcji f_a wynika natychmiast z tego, że każda z funkcji g_n jest ciągła (jednostajnie). ■

Twierdzenie 18.7

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a istnieje dokładnie jedna taka funkcja **ciągła** $f_a\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, że

18.7.1 dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzi równość
$$f_a(x+y)=f_a(x)\cdot f_a(y)\,;$$

[18.2] $g_n(x)=\lim_{j\to\infty}\tilde{f}_a(w_j)$, gdzie $w_j\in(-n,n)\cap\mathbb{Q}\subset(-m,m)\cap\mathbb{Q}$.

18.7.2 $f_a(1) = a$.

Funkcja f_a jest dodatnia, jest przedłużeniem funkcji $\tilde{f}_a$, $f_a(0)=1$. Jeśli $a > 1$, to funkcja f_a jest ściśle rosnąca, $f_1(x) = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeśli $0 < a < 1$, to funkcja f_a jest ściśle malejąca.

Dowód. Niech f_a oznacza ciągłe przedłużenie funkcji $\tilde{f}_a$, którego istnienie zostało wykazane w lemacie poprzedzającym to twierdzenie. Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Istnieją ciągi liczb wymiernych (v_n) i (w_n) zbieżne odpowiednio do x i y. Zachodzi więc równość $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n + w_n) = x + y$. Z ciągłości f_a wynika, że

$$f_a(x) \cdot f_a(y) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(v_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(w_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \big(\tilde{f}_a(v_n) \cdot \tilde{f}_a(w_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_a(v_n + w_n) = f(x + y).$$

Oczywiście $f_a(1) = \tilde{f}_a(1) = a$. Wykazaliśmy, że funkcja ciągła f_a ma obie własności.

Wykażemy, że jest tylko jedna funkcja ciągła spełniająca oba warunki. Z pierwszego warunku wynika, że $g(x)=g(\frac{x}{2}) \cdot g(\frac{x}{2}) \geqslant 0$. Jeśli $g(x) = 0$, to $a = g(1) = g(x)g(1 - x) = 0$ wbrew temu, że $a > 0$. Wobec tego $g(x) > 0$ dla każdego x. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość $g(1) = g(n \cdot \frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})^n$, zatem $g(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$. Jeśli k, n są liczbami naturalnymi, to $g(\frac{k}{n}) = g(\frac{1}{n})^k$, zatem $g(\frac{k}{n}) = \sqrt[n]{a^k} = a^{k/n}$. $g(0) = g(0 + 0) = g(0)^2$, zatem $g(0) = 1$ (wiemy, że $g(0) > 0$). Stąd $1 = g(0) = g(x)g(-x)$, zatem $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$ dla każdego x. W szczególności mamy $g(-\frac{k}{n}) = \frac{1}{g(\frac{k}{n})} = \frac{1}{a^{k/n}} = a^{-k/n}$. Wykazaliśmy więc, że dla każdej liczby wymiernej w zachodzi równość $g(w) = a^w = \tilde{f}_a(w)$. Stąd i z ciągłości g wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $g(x) = f_a(x)$, co kończy dowód jednoznaczności.

Załóżmy teraz, że $a > 1$ i $x < y$. Istnieją takie ciągi liczb wymiernych (v_n) i (w_n), że $x = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ i $y = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$. Dla dostatecznie dużych n mamy $v_n < w_n$, więc $f_a(v_n) < f_a(w_n)$, wobec tego $f_a(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_a(v_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_a(w_n) = f_a(y)$, więc $f_a(x) \leqslant f_a(y)$. Istnieją takie liczby wymierne v, w, że $x < v < w < y$, zatem $f_a(x) \leqslant f_a(v) < f_a(w) \leqslant f_a(y)$, więc $f(x) < f(y)$.

W taki sam sposób dowodzimy, że funkcja f_1 jest stała, a dla $0 < a < 1$ funkcja f_a jest ściśle malejąca. ■

Definicja 18.8 (potęgi i funkcji wykładniczej)
Funkcję ciągłą f_a, która spełnia warunek $f_a(1) = a$ oraz warunek $f_a(x + y) = f_a(x)f_a(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a. Jej wartość w punkcie x oznaczamy przez a^x i nazywamy potęgą liczby a o wykładniku x. ■

Uwaga 18.9 Zamiast zakładać ciągłość funkcji a^x można zakładać jej monotoniczność lub ograniczoność na pewnym otwartym przedziale zawierającym 0. Dowody wcale nie są trudniejsze od podanego przy założeniu ciągłości. ■

Uwaga 18.10 Jeśli $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą (albo monotoniczną), dla której równość $f(x + y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to albo jest f jest funkcją zerową, albo istnieje taka liczba $a > 0$, że $f(x) = a^x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. ■

Uwaga 18.11 Można wykazać istnienie funkcji nieciągłych spełniających równanie $f(x + y) = f(x)f(y)$. ■

Przykład 18.2 Niech $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wykazaliśmy już, że $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ (przykład 16.18) i że funkcja $\exp$ jest ciągła (przykład 17.31), więc $\exp(x) = \big(\exp(1)\big)^x$ dla $x \in \mathbb{R}$. ■

Przykład 18.3 Niech $\mathrm{Exp}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$. Udowodniliśmy w rozdziale pierwszym, że ta funkcja jest dobrze określona dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz, że $\mathrm{Exp}(x + y) = \mathrm{Exp}(x)\mathrm{Exp}(y)$. Dla każdego x i dla $n > -x$ zachodzi nierówność $\big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \geqslant 1 + x$, która wynika z nierówności Bernoulliego, więc $\mathrm{Exp}(x) \geqslant 1+x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd $\mathrm{Exp}(x) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(-x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$ dla $x<1$. Wobec tego $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(0) = 1$, zatem funkcja Exp jest ciągła, o czym przekonujemy się tak, jak o ciągłości funkcji exp w końcu przykładu 17.31. Stąd wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $\mathrm{Exp}(x) = \big(\mathrm{Exp}(1)\big)^x = e^x$. Przypomnijmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{n}\big)^n = e = \lim\limits_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\big)$, zad. 15.30. ■

Przykład 18.4 Z rozumowania w poprzednim przykładzie wynika, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1+x$. Jeśli $x<1$, to również $1+x \leqslant e^x = \frac{1}{e^{-x}} \leqslant \frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1-x}$. ■

Twierdzenie 18.12

Dla dowolnych liczb dodatnich a,b i dowolnych liczb rzeczywistych x,y zachodzą następujące wzory:

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $\big(\frac{a}{b}\big)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Dowód. $a^{-x}\cdot a^x = a^0 = 1$, więc pierwszy został udowodniony. $a^{x-y}\cdot a^y = a^x$, co dowodzi drugi z kolei. Jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $a^x > 0$. Ustalmy x. Niech $g(y) = \big(a^x\big)^y$ i $h(y) = a^{xy}$. Zachodzą równości $g(1) = \big(a^x\big)^1 = a^x = a^{x\cdot 1} = h(1)$. Mamy też

$$g(y+z) = \big(a^x\big)^{y+z} = \big(a^x\big)^y \cdot \big(a^x\big)^z = g(y)g(z) \text{ oraz}$$
$$h(y+z) = a^{x(y+z)} = a^{xy+xz} = a^{xy}a^{xz} = h(y)h(z).$$

Funkcja g jest ciągła jako wykładnicza o podstawie a^x, a funkcja h jako złożenie funkcji linowej i wykładniczej. Z twierdzenia o jednoznaczności funkcji wykładniczej wynika, że dla każdej liczby y zachodzi równość $g(y) = h(y)$, czyli $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$. W taki sam sposób można udowodnić równość $(ab)^x = a^x b^x$. Z niej wynika, że $\big(\frac{a}{b}\big)^x = \frac{a^x}{b^x}$. ■

Twierdzenie 18.13

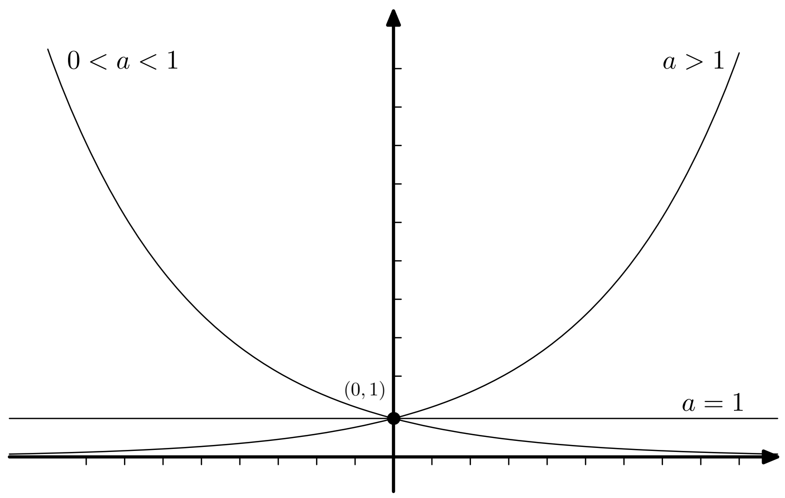
Jeśli $a>1$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ i $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$.

Jeśli $a<1$, to $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$.

Dowód. Funkcja a^x jest monotoniczna, więc wszystkie granice istnieją. Jeśli $a > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$, zatem $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$. W pozostałych trzech przypadkach postępujemy podobnie. ■

Twierdzenie 18.14 (o wypukłości funkcji wykładniczej) Funkcja wykładnicza a^x jest wypukła, jeśli $0 < a \neq 1$, to jest ściśle wypukła.

Dowód. Jeśli $x \neq y$ i $0 < a \neq 1$, to $0 < \left(a^{x/2} - a^{y/2}\right)^2 = {=}a^x + a^y - 2a^{(x+y)/2}$, zatem $a^{(x+y)/2} < \frac{1}{2}\left(a^x + a^y\right)$, co w świetle twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej kończy dowód ścisłej wypukłości, gdy $1 \neq a > 0$. ■



Wykresy funkcji $y = a^x$

Twierdzenie 18.15 (o obrazie funkcji wykładniczej) Jeśli $0 < a \neq 1$, to dla każdej liczby dodatniej y istnieje dokładnie jedna taka liczba rzeczywista x, że $y = a^x$.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $a > 1$. Mamy wtedy $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, więc istnieją takie liczby x' i x'', że $a^{x'} < y < a^{x''}$. Funkcja wykładnicza jest ciągła, więc ma własność przyjmowania wartości pośrednich (Darboux), zatem istnieje taka liczba $x \in (x', x'')$, że $y = a^x$. Ze ścisłej monotoniczności funkcji wykładniczej wnioskujemy, że taka liczba x jest co najwyżej jedna. ■

Twierdzenie, które właśnie udowodniliśmy można wypowiedzieć w następujący sposób: obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ jest półprosta $(0,\infty)$.

Definicja 18.16 (logarytmu)

Niech $0 < a \neq 1$. Logarytmem liczby $y > 0$ przy podstawie a nazywamy taką liczbę $x \in \mathbb{R}$ taką, że $y = a^x$. Piszemy wtedy $x = \log_a y$. Funkcję, która liczbie y przypisuje jej logarytm przy podstawie a nazywamy logarytmiczną. ■

Możemy więc napisać równość $a^{\log_a x} = x$. Funkcja logarytmiczna o podstawie a jest funkcją odwrotna do funkcji wykładniczej o tej samej podstawie. Z definicji logarytmu, z własności potęg i twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej wynika

Twierdzenie 18.17 (o własnościach logarytmu)

Niech $a, b > 0$ i $a \neq 1 \neq b$. Wtedy

18.17.1 $\log_a 1 = 0$;

18.17.2 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla dowolnych $x, y > 0$;

18.17.3 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ dla dowolnych $x, y > 0$;

18.17.4 $\log_a \left(x^y\right) = y \log_a x$ dla dowolnego $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$;

18.17.5 $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ dla dowolnego $x > 0$;

18.17.6 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ dla dowolnego $x > 0$;

18.17.7 funkcja logarytmiczna jest ciągła na $(0,\infty)$;

18.17.8 jeśli $a > 1$, to funkcja wykładnicza $\log_a x$ jest ściśle rosnąca, a jeśli $0 < a < 1$ — ściśle malejąca. ■

Twierdzenie 18.18 (o wypukłości logarytmu)

Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle wypukła, jeśli $a > 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle wklęsła.

Dowód. Niech $x \neq y$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi i niech $0 < p < 1$. Ze ścisłej wypukłości funkcji a^x wynika, że

$$a^{p \log_a x + (1-p) \log_a y} < p a^{\log_a x} + (1-p) a^{\log_a y} = px + (1-p)y .$$

Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle malejąca, więc

$$p \log_a x + (1-p) \log_a y > \log_a(px + (1-p)y),$$

a jeśli $a > 1$, to funkcja $\log_a$ jest ściśle rosnąca, więc

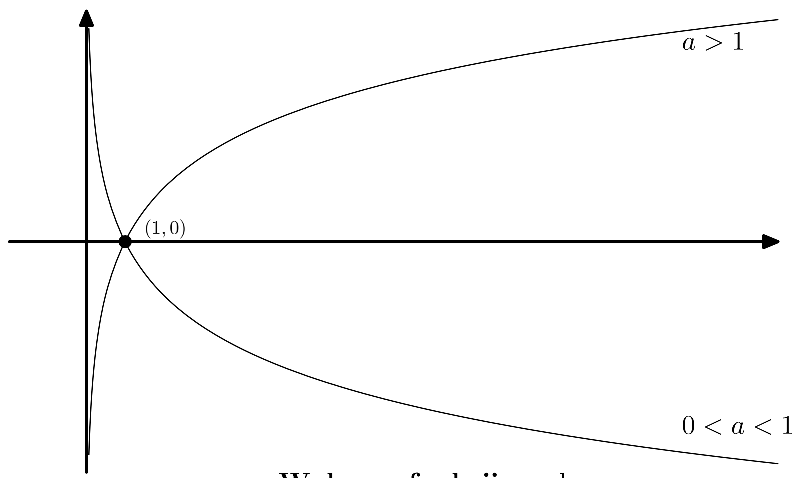
$$p \log_a x + (1-p) \log_a y < \log_a(px + (1-p)y).$$

Dowód został zakończony. ■

W twierdzeniu 18.13 podane są granice funkcji wykładniczej w $\pm\infty$. Z tego twierdzenia wynika od razu

Twierdzenie 18.19

Jeśli $a > 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.
Jeśli $0 < a < 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \infty$. ■



Wykresy funkcji $y = \log_a x$

Uwaga 18.20 (po co nam logarytmy)

Logarytmami zaczęto zajmować się na początku XVII wieku. Celem było uproszczenie skomplikowanych obliczeń pojawiających się w różnych sytuacjach, głównie w astronomii. Nie było wtedy komputerów, kalkulatorów — obliczano wszystko ,,ręcznie". Opublikowanie tablic przez Johna Napiera w 1614 r logarytmicznych, a następnie w 1624 r tablic logarytmów dziesiętnych (czyli o podstawie 10) przez Henry Briggsa uprościło obliczenia: można było zastąpić mnożenie dodawaniem, pierwiastkowanie — dzieleniem logarytmu przez stopień pierwiastka itd. Chcąc znaleźć iloczyn xy można było znaleźć w tablicach logarytmów liczby

$\log_a x$ i $\log_a y$, następnie dodać je, bo $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, odszukać w tablicach liczbę $\log_a(xy)$, by odczytać czemu jest równy iloczyn. Podobnie można potęgować, pierwiastkować, dzielić.

Dziś rachunki przeprowadzają za nas urządzenia elektroniczne i mało kogo obchodzi, jak one to robią. Tym nie mniej jest drugi bardzo istotny powód używania logarytmów. W sytuacjach, w których mamy do czynienia z liczbami bardzo różnej wielkości warto te liczby zlogarytmować. Podstawowe przykłady to skala trzęsień ziemi, jasności gwiazd, występujący w chemii czynnik pH i wiele innych. Jeśli pojawiają się czasem liczby wielkości 10^{-7} a czasem liczby rzędu 10^7, to jest kłopot z kontrolą ich wielkości, z rysowaniem wykresów itp. Po zlogarytmowaniu (przy podstawie 10) mamy do czynienia z liczbami od -7 do 7, które znacznie łatwiej można kontrolować. Nie wydaje się, by w dającej się przewidzieć przyszłości zrezygnowano z logarytmów. ■

Bardzo ważną rolę w matematyce pełni funkcja wykładnicza o podstawie e i wraz z nią logarytmy o tej samej podstawie. Zwane są one naturalnymi. W istocie rzeczy one pojawiły się przed dziesiętnymi.

Definicja 18.21 (logarytmu naturalnego)
Logarytmem naturalnym liczby $x > 0$ nazywamy liczbę $\log_e x$, którą oznaczamy symbolem $\ln x$. ■

Ponieważ $e \approx 2{,}718281828 > 1$, więc funkcja ln jest ściśle rosnąca i ściśle wklęsła.

Zajmiemy się dalszymi własnościami funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

Twierdzenie 18.22
Dla każdej liczby dodatniej a istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$.

Dowód. Istnienie skończonych granic jednostronnych wynika z wypukłości funkcji wykładniczej, co udowodniliśmy w poprzednim rozdziale (zob. twierdzenie 17.54). Wystarczy wykazać ich równość. Mamy $\lim\limits_{h\to 0} a^h = 1$ i $\frac{a^h-1}{h} = a^h\frac{1-a^{-h}}{h} = a^h\frac{a^{-h}-1}{-h}$. Z tych równości wynika od razu, że $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{a^h-1}{h} = 1\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{a^h-1}{h}$, co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 18.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$. Wiemy już (przykład 18.4), jeśli $x<1$, to $1+x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1+(-x)} = \frac{1}{1-x} = 1+x+\frac{x^2}{1-x}$, a stąd wnioskujemy, że $0 \leqslant \frac{e^x-(1+x)}{|x|} \leqslant \frac{|x|}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Stąd wynika, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x} = 0$, bo $\frac{e^x-(1+x)}{x} = \frac{e^x-(1+x)}{|x|}\frac{|x|}{x}$ a funkcja $\frac{|x|}{x}$ jest ograniczona. ■

Przykład 18.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Dla $a=1$ obie strony równości są równe 0. Załóżmy, że $0<a\neq 1$. Wobec tego zachodzi równość $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a$. Z tej równości i tego, co wykazaliśmy w poprzednim przykładzie wynika dowodzony wzór. Dodatkowo $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\ln a$. ■

Uwaga 18.23

Czytelnik zechce wykazać, że jeśli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $a^x \geqslant 1+x$, to $a=e$. ■

Przykład 18.7 Jeśli $x>-1$, to $x \geqslant \ln(1+x)$ przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$. Tę nierówność otrzymujemy logarytmując znaną już nierówność $e^x \geqslant 1+x$. ■

Przykład 18.8 Jeśli $x>-1$, to $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$.
Mamy $\frac{-x}{1+x} = -1+\frac{1}{1+x} > -1$, zatem $\frac{-x}{1+x} \geqslant \ln\left(1+\frac{-x}{1+x}\right) = \ln\frac{1}{1+x} = -\ln(1+x)$, czyli $\ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$. ■

Przykład 18.9 Wykażemy, że $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Wynika to z nierówności $x \geqslant \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x} = x+\frac{-x^2}{1+x}$, bo z niej wynika, że $0 \leqslant x-\ln(1+x) \leqslant \frac{x^2}{1+x}$. ■

Uwaga 18.24

Funkcje wykładnicze służą do opisywania wielu zjawisk. Rozważymy dwa przykłady: zmiana długości metalowego pręta pod wpływem zmiany jego temperatury i ubytek masy pierwiastka promieniotwórczego z upływem czasu. Jak wiadomo „*przyrost* $\Delta\ell$ *długości metalowego pręta odpowiadający przyrostowi* Δt *jego temperatury jest proporcjonalny do jego długości* ℓ". Podobnie *ubytek* Δm *masy pierwiastka promieniotwórczego w czasie* Δt *jest proporcjonalny do masy* m.

Oznaczmy przez $\ell(t)$ długość pręta w temperaturze t. Wtedy $\Delta\ell = \ell(t+\Delta t) - \ell(t)$. Jeśli współczynnik proporcjonalności oznaczymy przez k, to $\Delta\ell = k\ell(t)$. Oczywiście różnym przyrostom temperatury odpowiadają różne wartości współczynnika k, więc należy myśleć o k jak o funkcji zmiennej Δt. Ta funkcja oczywiście jest rosnąca — większy przyrost temperatury powoduje większe wydłużenie pręta. Jeśli h jest liczbą rzeczywistą, to

$$\ell(t+h) = \ell(t) + k(h)\cdot\ell(t) = \big(1+k(h)\big)\ell(t).$$

Dla dowolnych liczb h_1, h_2 mamy więc $\big(1+k(h_1+h_2)\big)\ell(t) = \ell(t+h_1+h_2) = \big(1+k(h_2)\big)\ell(t+h_1) = \big(1+k(h_2)\big)\big(1+k(h_1)\big)\ell(t)$. Niech $f(h) = 1+k(h)$. Z otrzymanej równości wnioskujemy, że $f(h_1+h_2) = f(h_2)f(h_1)$, więc funkcja f jest funkcją wykładniczą (jest rosnąca!). Istnieje więc taka liczba $a>1$, że dla dowolnego h zachodzi równość $f(h) = a^h$. [18.3] Niech $\lambda = \ln a$. Możemy napisać $f(h) = e^{\lambda h}$. Wtedy $\ell(t+h) = e^{\lambda h}\ell(t)$. Liczba λ nazywana jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej metalu. Dla żelaza mamy $\lambda \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}\frac{1}{1^\circ C}$.

[18.3] W istocie rzeczy funkcja k, więc również funkcja f, jest określona jedynie w pewnym otoczeniu 0, bo w wysokich i w niskich temperaturach prawo fizyczne, do którego odwołaliśmy się już nie działa, np. w wysokiej temperaturze metal staje się płynny. Jednak można twierdzenie charakteryzujące funkcję wykładniczą udowodnić w przypadku funkcji określonych na przedziale postaci $(-\delta,\delta)$, wtedy równanie $f(x+y)=f(x)f(y)$ ma być spełnione, jeśli $x,y\in(-\delta,\delta)$ i $x+y\in(-\delta,\delta)$.

Jeśli $0 < \lambda h < 1$, to $0 < e^{\lambda h} - (1 + \lambda h) < \frac{(\lambda h)^2}{1-\lambda h}$. Wzór $\frac{x^2}{1-x}$ definiuje funkcję ściśle rosnącą na przedziale $[0,1)$, bo licznik rośnie a mianownik maleje. Przyjmijmy, że różnicą temperatur między zimą i latem wynosi nie więcej niż 50° C, a długość szyny kolejowej jest równa zimą 20 m. Wtedy ($h = 50$, $\ell(t) = 20$)

$$(1 + \lambda h)\ell(t) = (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50) \cdot 20m = 20m + 1{,}2 \cdot 10^{-2} m\,,$$

zatem w przybliżeniu długość szyny latem jest większa o 12 mm niż zimą. Błąd, który popełniliśmy jest mniejszy niż

$$20 \cdot \frac{(6 \cdot 10^{-4})^2}{1 - 6 \cdot 10^{-4}} < 20 \cdot (6 \cdot 10^{-4})^2 \cdot (1 + 7 \cdot 10^{-4}) =$$
$$= 7{,}2 \cdot 10^{-6} + 5{,}04 \cdot 10^{-9} < 7{,}3 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}\,.$$

To w metrach, więc ten błąd jest mniejszy niż $0,01$ mm. Taki błąd żadnego praktycznego znaczenia w tym przypadku nie ma, bo z taką dokładnością szyny nie są mierzone! Dlatego zamiast funkcji wykładniczej stosowana jest w takich sytuacjach **liniowa**, którą przybliżamy właściwą funkcję.

Zupełnie inaczej jest w przypadku rozpadu promieniotwórczego, chociaż wzór, który otrzymujemy, wygląda prawie tak samo: $m(t+h) = e^{\lambda h} m(t)$. Tym razem $\lambda < 0$, ale to nie jest główna różnica. Ważne jest to, że często interesuje nas tzw. okres połowicznego rozpadu, czyli takie $h > 0$, że $e^{\lambda h} = \frac{m(t+h)}{m(t)} = \frac{1}{2}$, czyli $\lambda h = -\ln 2 \approx -0{,}6931$. W tym wypadku otrzymujemy

$$e^{\lambda h} - (1 + \lambda h) = \tfrac{1}{2} - (1 - 0{,}693) = 0{,}193\,,$$

a to oznacza, że wzoru przybliżonego stosować w tej sytuacji nie można. Obliczenia, w których $\lambda h \approx -\ln 2$ są często wykonywane. Przy ustalaniu wieku zabytków zawierających substancje organiczne mierzona jest zawartość radioaktywnego węgla ${}^{14}C$, tzw. radiowęgla. Czas obliczany jest z wzoru $m(t+h) = e^{\lambda h} m(t)$ — znamy współczynnik λ, czas $t + h$, w którym dokonujemy pomiaru, masę radiowęgla $m(t+h)$ w chwili dokonywania pomiaru, $m(t)$ — masę radiowęgla w żywej substancji organicznej (w żywych organizmach stosunek masy radiowęgla do masy węgla jest stały, a po śmierci maleje, bo nowy węgiel radioaktywny już nie jest dostarczany i jego zawartość zmniejsza się dwukrotnie w ciągu około 5730 lat, tzn. $\lambda \approx -\frac{0{,}6931}{5730} \approx 1{,}2096 \cdot 10^{-4}$).

Definicja 18.25 (funkcji potęgowej)

Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Funkcję postaci x^a nazywamy funkcją potęgową. Gdy $a > 0$ jej dziedziną jest półprosta domknięta $[0, \infty)$, gdy $a \leqslant 0$ — półprosta $(0, \infty)$. ■

Czasem można przyjąć, że dziedzina jest większa, np. można uważać, że dziedziną funkcji $x^{-3/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ jest zbiór liczb różnych od zera (można dopuścić ujemne argumenty). Trzeba jednak wtedy wszystko dokładnie kontrolować, bo ujemna podstawa potęgi może powodować niewykonalność niektórych operacji.

Twierdzenie 18.26 (o własnościach funkcji potęgowej)

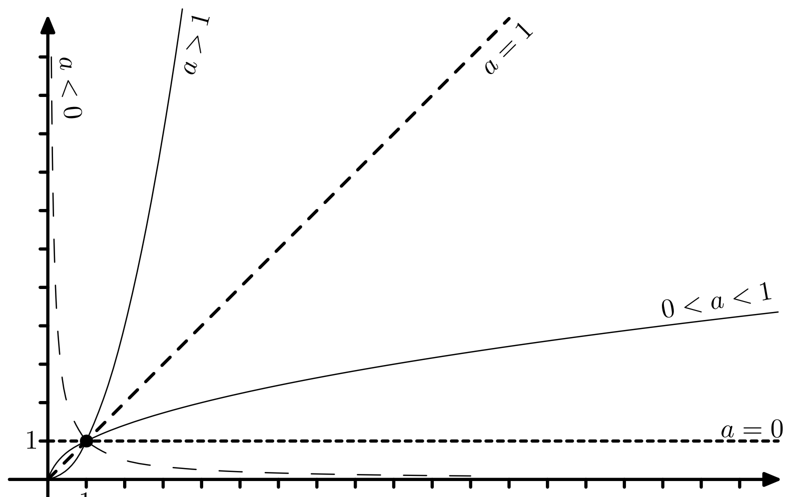
Funkcja potęgowa x^a jest ciągła w całej swej dziedzinie;
jeśli $a > 0$, to jest ona ściśle rosnąca na półprostej $(0, \infty)$,
jeśli $a = 0$ — stała a jeśli $a < 0$ — malejąca.

Dowód. Mamy $x^a = e^{a \ln x}$, czyli funkcja potęgowa jest złożeniem funkcji $a \ln x$ i funkcji ściśle rosnącej e^z argumentu z. Z punktu widzenia monotoniczności nie różni się od znanej nam już funkcji $a \ln x$. ■

Twierdzenie 18.27

Jeśli $a < 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = 0$ i $\lim\limits_{x\to 0} x^a = \infty$;
jeśli $a = 0$, to $x^a = x^0 = 1$ dla każdego $x > 0$;
jeśli $a > 0$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^a = \infty$ i $\lim\limits_{x\to 0} x^a = 0$.

Dowód. Wynika to natychmiast z własności logarytmu naturalnego i funkcji wykładniczej. ■



Wykresy funkcji $y = x^a$

Zajmiemy się wypukłością funkcji potęgowej.

Lemat 18.28
Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych liczb dodatnich $a \neq b$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} < \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}$.

Dowód. Nierówność, która zamierzamy udowodnić jest równoważna następującej: $\left(a^n + b^n\right)^{n+1} < 2\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n$. Udowodnimy ją indukcyjnie. Dla $n = 1$ mamy $(a+b)^2 < 2(a^2+b^2)$, czyli $2ab < a^2 + b^2$ tzn. $0 < (a-b)^2$, co jest prawdą, bo $a \neq b$.

Załóżmy następnie że dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\left(a^n + b^n\right)^{n+1} < 2\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n$.

Mnożąc nierówność $2ab < a^2 + b^2$ przez $a^n b^n > 0$ otrzymujemy $2a^{n+1}b^{n+1} < a^n b^{n+2} + a^{n+2}b^n$, stąd mamy
$a^{2n+2} + 2a^{n+1}b^{n+1} + b^{2n+2} < a^{2n+2} + a^n b^{n+2} + a^{n+2}b^n + b^{2n+2}$,
więc $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^2 < \left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)\left(a^n + b^n\right)$. Stąd otrzymujemy $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^{2n+2} < \left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)^{n+1}\left(a^n + b^n\right)^{n+1}$, więc $\frac{(a^{n+1} + b^{n+1})^{n+2}}{(a^n + b^n)^{n+1}} < \frac{(a^{n+2} + b^{n+2})^{n+1}}{\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^n}$. Ostatnio otrzymaną nierówność mnożymy przez tę z założenia indukcyjnego i otrzymujemy $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)^{n+2} < 2\left(a^{n+2} + b^{n+2}\right)^{n+1}$, czyli tezę indukcyjną. Dowód został zakończony. ■

Z udowodnionego lematu wynika

Wniosek 18.29
Jeśli $m < n$, $a \neq b$ i $a,b > 0$, to $\sqrt[m]{\frac{a^m+b^m}{2}} < \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$. ■

Podstawiając w tym wniosku $a = \sqrt[n]{x}$ i $b = \sqrt[n]{y}$ i podnosząc nierówność obustronnie do potęgi m otrzymujemy nierówność
$$\tfrac{1}{2}\big(x^{m/n} + y^{m/n}\big) < \big(\tfrac{x+y}{2}\big)^{m/n}.$$
Przyjmując $x = u^{n/m}$, $y = v^{n/m}$ otrzymujemy
$$\tfrac{1}{2}\big(u + v\big) < \big(\tfrac{u^{n/m}+v^{n/m}}{2}\big)^{m/n},$$
co można przepisać w postaci $\big(\frac{u+v}{2}\big)^{n/m} < \frac{1}{2}\big(u^{n/m}+v^{n/m}\big)$. Stąd wynika następujący

Wniosek 18.30 Jeśli $0 < r < 1 < s$, $r,s \in \mathbb{Q}$, to funkcja x^r jest ściśle wklęsła, a funkcja x^s — ściśle wypukła. ■

Lemat 18.31 (o pochodnej funkcji potęgowej)
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = at^{a-1}$ dla każdego $t > 0$ i każdego $a \in \mathbb{R}$.

Dowód. Dla $a = 0$ teza jest oczywista. Dalej $a \neq 0$. Wtedy
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{a\ln(t+h)} - e^{a\ln t}}{a\ln(t+h) - a\ln t} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{a\ln(t+h) - a\ln t}{h} =$
$= e^{a\ln t} \cdot a \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{t})}{\frac{h}{t}} \cdot \frac{1}{t} = t^a \cdot a \cdot 1 \cdot \frac{1}{t} = at^{a-1}$ — wynika to z twierdzeń z przykładów 18.5, 18.6 i 18.9.

Twierdzenie 18.32 (o wypukłości funkcji potęgowej)
Jeśli $a > 1$, to funkcja x^a jest ściśle wypukła.
Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja x^a jest ściśle wklęsła.
Jeśli $a < 0$, to funkcja x^a jest ściśle wypukła.

Dowód. Niech $0 < x < y$. Jeśli $a > 1$, to istnieje ciąg (s_n) liczb wymiernych, większych od 1 zbieżny do a. Z wniosku poprzedzającego to twierdzenie wynika, że dla każdego s_n zachodzi nierówność $\big(\frac{x+y}{2}\big)^{s_n} < \frac{1}{2}\big(x^{s_n} + y^{s_n}\big)$. Z ciągłości funkcji wykładniczej wynika, że spełniona jest nierówność
$$\big(\tfrac{x+y}{2}\big)^a = \lim_{n\to\infty} \big(\tfrac{x+y}{2}\big)^{s_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\big(x^{s_n} + y^{s_n}\big) \leqslant \tfrac{1}{2}\big(x^a + y^a\big).$$
Z niej i z twierdzenia o wypukłości funkcji ciągłej wynika, że funk-

cja x^a jest wypukła.

Załóżmy, że nie jest ściśle wypukła. Istnieją wtedy takie liczby $0 < x < y$, że $\left(\frac{x+y}{2}\right)^a = \frac{1}{2}\left(x^a + y^a\right)$.

Wynika z tej równości, że $y^a - \left(\frac{x+y}{2}\right)^a = \left(\frac{x+y}{2}\right)^a - x^a = =\frac{1}{2}\left(y^a - x^a\right)$. Ponieważ funkcja x^a jest wypukła, więc funkcja $Q(t) := \frac{t^a - x^a}{t-x}$ zmiennej t jest niemalejąca (twierdzenie 17.53 z poprzedniego rozdziału). Z założenia o punktach x, y wynika, że $Q\left(\frac{x+y}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^a - x^a}{\frac{y-x}{2}} = \dfrac{y^a - x^a}{y-x} = Q(y)$. Stąd wynika, że funkcja Q jest stała na przedziale $\left[\frac{x+y}{2}, y\right]$, jej jedyną wartością na tym przedziale jest liczba $A := \frac{y^a - x^a}{y-x}$. Wynika stąd, że jeśli $t \in \left[\frac{x+y}{2}, y\right]$, to $\frac{t^a - x^a}{t-x} = A$, więc $t^a = A(t-x) + x^a$. Wobec tego $at^{a-1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(t+h)^a - t^a}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{A(t+h-x)+x^a - A(t-x) - x^a}{h} = A$ dla każdego $t \in \left(\frac{x+y}{2}, y\right)$, co jest niemożliwe, bo funkcja at^{a-1} jest ściśle rosnąca, zatem nie jest stała na żadnym przedziale.

Podobnie dowodzimy, że funkcja x^a jest wklęsła, gdy w przypadku $a \in (0,1)$. Jeśli $a < 0$, to funkcja $x^a = e^{a \ln x}$ jest złożeniem funkcji ściśle wypukłej $a \ln x$ i ściśle rosnącej funkcji ściśle wypukłej e^y, więc jest ściśle wypukła. ■

Podany tu dowód twierdzenia jest zaskakująco długi. Później będziemy w stanie podać znacznie krótszy (w dwóch wierszach), ale na razie brakuje dobrych narzędzi do zrealizowania tego celu.

Przykład 18.10 Uogólnimy nierówność Bernoulliego, mianowicie udowodnimy, że jeśli $x > -1$ i $x \neq 0$ oraz
jeśli $a < 0$ lub $a > 1$, to $(1+x)^a > 1 + ax$;
jeśli $0 < a < 1$, to $(1+x)^a < 1 + ax$.

Dowód. Mamy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{a\ln(1+x)} - 1}{a\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot a = a$, bo, jak udowodniliśmy wcześniej, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Jeśli $a < 0$ lub $a > 1$, to funkcja $(1+x)^a$ jest ściśle wypukła na półprostej $(-1,\infty)$, więc funkcja $\frac{(1+x)^a-1}{x}$ jest ściśle rosnąca na zbiorze $(-1,0)\cup(0,\infty)$. Wynika stąd, że jeśli $x\in(-1,0)$, to zachodzi nierówność $\frac{(1+x)^a-1}{x} < \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$, zaś jeśli $x>0$, to — nierówność $\frac{(1+x)^a-1}{x} > \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$.

W przypadku $0<a<1$ rozumujemy tak samo korzystając ze ścisłej wklęsłości funkcji x^a. ■

Przykład 18.11 Dla dowolnych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n\geqslant 0$ zachodzi nierówność $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leqslant \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Możemy założyć, że liczby a_1, a_2, …, a_n są dodatnie. bo jeśli jedna z nich jest równa 0, to lewa strona nierówności też jest zerem, więc nierówność jest spełniona. Dowodzona nierówność równoważna jest nierówności

$$\ln\tfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant \tfrac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n),$$

a to jest nierówność Jensena dla funkcji ściśle wklęsłej ln ze wszystkimi wagami równymi $\frac{1}{n}$. ■

Przykład 18.12 Z wypukłości funkcji potęgowej x^a dla $a>1$ i z nierówności Jensena wynika, że

$$(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)^a\leqslant p_1x_1^a+p_2x_2^a+\cdots+p_nx_n^a,$$

dla dowolnych nieujemnych liczb $x_1,x_2,\ldots,x_n$ i $p_1,p_2,\ldots,p_n$, jeśli $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

Niech $0<c<d$ i niech a_1, a_2, …, a_n będą liczbami dodatnimi. Przyjmujemy $x_j=a_j^c$ dla $j=1,2,\ldots,n$ i $a=\frac{d}{c}$. Otrzymujemy

$$(p_1a_1^c+p_2a_2^c+\cdots+p_na_n^c)^{d/c}\leqslant p_1a_1^d+p_2a_2^d+\cdots+p_na_n^d,$$

co można zapisać jako

$$(p_1a_1^c+p_2a_2^c+\cdots+p_na_n^c)^{1/c}\leqslant (p_1a_1^d+p_2a_2^d+\cdots+p_na_n^d)^{1/d}.$$

W szczególności, gdy $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{a_1^c+a_2^c+\cdots+a_n^c}{n}\right)^{1/c}\leqslant\left(\frac{a_1^d+a_2^d+\cdots+a_n^d}{n}\right)^{1/d}. \ ■$$

Przykład 18.13 (Nierówność Höldera)
Dla dowolnych liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ i dowolnych takich liczb $p, q > 0$, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ zachodzi nierówność:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq$$
$$\leqslant \left(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p\right)^{1/p} \left(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q\right)^{1/q}.$$

Dowód. Z równości $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wynika, że $p > 1$, $q > 1$ oraz $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Ponieważ $p > 1$, więc funkcja x^p jest ściśle wypukła, jak to wykazaliśmy wcześniej. Możemy zastosować do niej nierówność Jensena. Bez straty ogólności można założyć, że wszystkie liczby b_1, b_2,$\ldots, b_n$ są dodatnie, gdyby dla pewnego j było $b_j = 0$ wykazalibyśmy nierówność dla liczb a_1, $\ldots$, a_{j-1}, a_{j+1}, $\ldots$, a_n, b_1, $\ldots$, b_{j-1}, b_{j+1}, $\ldots$, b_n, a więc z tą samą lewą stroną a prawą być może mniejszą (gdy $a_j > 0$) niż docelowa. Przyjmijmy $p_j = \frac{b_j^{p/(p-1)}}{\sum b_i^{p/(p-1)}}$. Mamy wtedy

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^p}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{p/q}} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j^{1/(p-1)}} b_j^{p/(p-1)}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)}}\right)^p \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)} \leq$$

$$\leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^p}{b_j^{p/(p-1)}} b_j^{p/(p-1)}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)}} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^{p/(p-1)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^p,$$

a ta nierówność jest równoważna dowodzonej.
Dla $p = q = 2$ otrzymujemy nierówność Schwarza, tzn. stwierdzenie, że iloczyn skalarny wektorów $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jest nie większy niż iloczyn ich długości. ■

Zadania

Poniżej symbol log *oznacza* $\log_{10}$, *czyli logarytm dziesiętny.*

1. Znaleźć przybliżenie $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$, $\log 15$

wiedząc, że: $\log 2 \approx 0{,}30103$, $\log 3 \approx 0{,}47712$, $\log 7 \approx 0{,}84509$.

2. Uprościć

a. $7^{\log_{49} 5-1}$; **b.** $125^{\log_{25} 16}$;

c. $\log_5 7 \cdot \log_{49} 5$; **d.** $\log_{16} 7 \cdot \log_7 32$.

3. Znaleźć $\log_{54} 168$, jeśli $a = \log_7 12$ i $b = \log_{12} 24$.

4. Znaleźć $\log_{30} 8$, jeśli $a = \log_{30} 3$ i $b = \log_{30} 5$.

5. Znaleźć $\log_9 20$, jeśli $a = \log_{10} 2$ i $b = \log_{10} 3$.

6. Wykazać bez tablic i urządzeń elektronicznych, że

a. $\frac{1}{3} > \log_{10} 2 > 0{,}3$;

b. $0{,}4 + \log_{10} 6 > \log_{10} 15 > 1{,}2 \log_{10} 12 - \log_{10} \sqrt[5]{4}$.

7. Rozwiązać równanie

a. $\log_4(x+2)\log_x 2 = 1$; **b.** $x^{\frac{\log x+7}{4}} = 10^{\log x+1}$;

c. $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$;

d. $\log(x^3+8) - \log(x+2) = 1$; **e.** $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$;

f. $\log(5-x) + 2\log\sqrt{3-x} = 0$; **g.** $100x^{\log x} = x^3$;

h. $\log(152+x^3) - 3\log(x+2) = 0$; **i.** $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$;

j. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$; **k.** $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$;

l. $x^{\log x} = \frac{100}{x}$ **ł.** $x^{\log x} = 10$;

m. $\log_4(x+12)\log_x 2 = 1$

n. $$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}+\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x + \\ +\left(\sqrt{\sqrt{x^2-8x+9}-\sqrt{x^2-8x+7}}\right)^x = 2^{1+0{,}25x};$$

o. $\frac{\log(x^2)}{(\log x)^2} + \frac{\log(x^3)}{(\log x)^3} + \frac{\log(x^4)}{(\log x)^4} + \cdots = 8$;

p. $$x^{\log^2 x + \log(x^3)+3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}}.$$

8. Rozwiązać równanie $1 + \log_b(2\log_{10} a - x) \cdot \log_x b = \frac{2}{\log_b x}$, jeśli $a > 0$ i $0 < b \neq 1$ są danymi liczbami rzeczywistymi.

9. Rozwiązać równanie $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \big(\log_{10}(\log_{10} a) - 1\big)\log_x 10$ zakładając, że $a > 0$ jest daną liczbą rzeczywistą.

10. Ile rozwiązań ma równanie $2^x = x + 3$. Znaleźć jego pierwiastki z dokładnością do 0,01.

11. Rozwiązać układ równań

a. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^3; \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y; \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\log y} = 4; \end{cases}$

e. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{26}{5}, \\ xy = 64. \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 648, \\ 3^x \cdot 2^y = 432; \end{cases}$

g. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2, \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2; \end{cases}$ **h.** $\begin{cases} y^x = x^y, \\ y^3 = x^2; \end{cases}$

i. $\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5, \\ \log_{10} x + \log_{10} y = \frac{5}{4}; \end{cases}$ **j.** $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7; \end{cases}$

k. $\begin{cases} x^{x-y} = 2y - 2\ , \\ \sqrt{x^2 + 5x + 2y - 3} + \sqrt{x^2 + x + y + 2} = \\ \qquad = \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 3}\,. \end{cases}$

12. Rozwiązać nierówność $\log_a x > 6 \log_x a - 1$, jeśli $0 < a < 1$.

13. Rozwiązać nierówność $\log_{x+p} 2 < \log_x 4$, jeśli $0 < p < \frac{1}{4}$.

14. Rozwiązać nierówność $\frac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)} > 3$, jeśli $a > 1$.

15. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c > \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

16. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $a^a b^b c^c < \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$.

17. Dowieść, że jeśli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ i $a \neq b \neq c \neq a$, to $(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c < \left(\frac{2}{3}(a+b+c)\right)^{a+b+c}$.

18. Dowieść, że jeśli $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $1 \neq c > 0$, $1 \neq x > 0$ i $abc \neq 1$, to

$\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_c x \log_a x = \frac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$.

19. Dowieść, że jeśli a_1, a_2, ..., a_n są liczbami dodatnimi i żadna z nich nie jest równa 1, to

$(\log_{a_1} a_2)(\log_{a_2} a_3)(\log_{a_3} a_4) \cdot \ldots \cdot (\log_{a_{n-1}} a_n)(\log_{a_n} a_)= 1$.

20. Niech $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. [18.4]
Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:
(a) $\sinh(x+y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \cosh(x)$,
(b) $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) + \sinh(y) \cdot \sinh(x)$,
(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(y) = 1$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$.

21. Rozstrzygnąć, czy istnieje inna para funkcji spełniających warunki (a), (b), (c) i (d) z poprzedniego zadania.

22. W czterocyfrowych tablicach logarytmów dziesiętnych znaleźć liczbę $\log 2$ z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

23. Dowieść, że istnieją takie liczby niewymierne a, b, że liczba a^b jest wymierna.

24! Udowodnić, że $\log 2 \notin \mathbb{Q}$.

25. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, c_1 \neq 0$. Dowieść, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ liczba 2^k zaczyna się od cyfr $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

26. Dowieść, że jeśli liczby $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są wymierne, liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są pierwsze i parami różne, to z równości

$$w_1 \ln p_1 + w_2 \ln p_2 + \cdots + w_n \ln p_n = 0$$

wynika równość $w_1 = w_2 = \ldots = w_n = 0$.

27. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

28. Dowieść, że istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$. [18.5]

29. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ jest rozbieżny.

30. Dowieść, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ jest zbieżny.

31! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ i $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.

32! Dowieść, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, to $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-b} a^x = \infty$.

[18.4] Te funkcje nazywane są sinusem hiperbolicznym i kosinusem hiperbolicznym

[18.5] Ta granica nazywana jest stałą Eulera. Nie wiadomo, czy jest wymierna.

33! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ dla każdej liczby $a > 0$.

34! Dowieść, że $\lim\limits_{x\to 0} x^a \ln x = 0$ dla każdej liczby $a > 0$.

35! Dowieść, że jeśli $0 < a \neq 1$, to $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

36. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^n + \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} - 2e\Big)$.

37. Znaleźć $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, jeśli $f(x) =$

a. $(\ln x)^{1/x}$; **b.** $\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{x^3/(1-x)}$;

c. $\left(\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}\right)^x$ **d.** $\left(\frac{x^3+11x+20}{x^3-x^2+121}\right)^{x+7}$;

e. $\left(\frac{x+13}{x-13}\right)^{x^7-7}$; **f.** $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$;

g. $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x\sqrt{x}}$ **h.** $\big(1+\frac{1}{\ln x}\big)^x$.

38. Znaleźć: **a.** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x-1}$; **b.** $\lim\limits_{x\to 1} \big(\frac{1+x}{2+x}\big)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

39. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \big(\ln n\big)^a$ jest zbieżny?

40. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \ln n$ jest zbieżny?

41. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{-an^2}$ jest zbieżny?

42. Niech $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ściśle monotoniczną, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór $f(mn) = f(m) + f(n)$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a > 0$, $a \neq 1$, że równość $f(n) = \log_a n$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

43. Niech $a_1 = x > 0$ i $a_{n+1} = x^{a_n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Dla jakich liczb rzeczywistych $x > 0$ ciąg (a_n) ma granicę?

44. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\lfloor \ln n \rfloor} \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

45. Udowodnić, że jeśli $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ a^x \geqslant 1 + x$, to $a = e$.

46. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to zachodzi nierówność $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

47. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} \leqslant \frac{a+nb}{n+1}$. Dla jakich a, b, n zachodzi równość?

48. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to zachodzi nierówność $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

49. Udowodnić, że jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie oraz $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, to zachodzi nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \cdots + + \frac{s^n}{n!}.$$

50. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2^n} \leqslant n+1$.

51. Znaleźć minimum funkcji $(x-1)^5(x+1)(2x+1)^2$ w przedziale $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ i w przedziale $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Można skorzystać z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną.

52. Wykazać, że $\ln x < -1 + \ln 10 + \frac{x}{10}$ dla $0 < x \neq 10$.

53. Wykazać, że $\ln x < \frac{1}{2}(x^2-1)$ dla $0 < x \neq 1$.

54. Dowieść, że funkcja $x\ln x$ jest ściśle wypukła na $(0,\infty)$.

55. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $z > 0$, to zachodzi nierówność $x\ln x + 2y\ln y + 3z\ln z + (x+2y+3z)\ln 6 \geqslant$ $\geqslant (x+2y+3z)\ln(x+2y+3z)$. Kiedy zachodzi równość?

56. Wykazać, że nierówność $\left(\frac{x+2y}{3}\right)^{\frac{x+2y}{3}} < \frac{x^x+2y^y}{3}$ zachodzi dla dowolnych *różnych* liczb rzeczywistych dodatnich x, y.

57. Wykazać, że $(2-\sqrt{3})a^{2+\sqrt{3}} + (2+\sqrt{3})b^{2-\sqrt{3}} \geqslant 4\sqrt[4]{ab}$ dla dowolnych $a > 0$ i $b > 0$.

58. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b równanie $\ln x = ax + b$ ma dokładnie dwa rozwiązania, dokładnie jedno rozwiązanie lub nie ma rozwiązań w ogóle.

59. Dowieść, że $2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$ dla dowolnych liczb $p > 1$ i $x \in [0,1]$.

60. Dowieść nierówności Minkowskiego ($p \geqslant 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$):

$$\big(|a_1+b_1|^p + |a_2+b_2|^p + \cdots + |a_n+b_n|^p\big)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \big(|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p\big)^{1/p} + \big(|b_1|^p+|b_2|^p+\cdots+|b_n|^p\big)^{1/p}$$

61. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnić, że następujące trzy warunki są równoważne:

(i) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;

(ii) ciąg (p_n) o wyrazie $p_n = (1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$ jest zbieżny;

(iii) istnieje taka liczba naturalna k, że ciąg (q_n) o wyrazie $q_n = (1-a_k)(1-a_{k+1})\cdot\ldots\cdot(1-a_n)$ ma granicę dodatnią i skończoną.

Uwaga. Jeśli $a_n \neq 1$ *dla każdego* n, *to można przyjąć, że* $k = 1$.