CIĄGI I ICH GRANICE

Definicja 15.1 (ciągu)
Ciągiem nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze złożonym ze wszystkich tych liczb całkowitych, które są większe lub równe pewnej liczbie całkowitej n_0. Wartość tej funkcji punkcie n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. ■

Zwykle oznaczamy wyrazy ciągu przez a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a sam ciąg symbolem $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ albo $\big(a_n\big)_{n=n_0}^{\infty}$ lub krótko $\big(a_n\big)$, jeśli nie ma wątpliwości od jakiego numeru zaczynamy, lub gdy jest to nieistotne. ■

Przykład 15.1 Liczby naturalne, wypisane w zwykłej kolejności, tworzą ciąg: $a_n = n$. ■

Przykład 15.2 Potęgi dwójki tworzą ciąg. Wystarczy przyjąć $a_n = 2^n$. Kolejne wyrazy tego ciągu wyglądają tak:

$$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots.$$

Można napisać: $a_n = 2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. ■

Przykład 15.3 Odwrotności kolejnych dodatnich liczb naturalnych tworzą ciąg: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ..., ogólnie $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$ ■

Przykład 15.4 Liczby
$a_1 = 1$, $a_2 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots$ tworzą ciąg. Możemy napisać wzór $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \ldots$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. ■

Przykład 15.5 Ciąg o wyrazach $c, c, c \ldots$ nazywamy stałym. ■

Przykład 15.6 Jeśli np. chcemy zdefiniować pole koła, to możemy rozważać np. wielokąty foremne wpisane w to koło o coraz większej liczbie boków i mówić, że pole koła jest liczbą, którą można przybliżać polami tych wielokątów, przy czym przybliżenie jest tym dokładniejsze im większa jest liczba boków wielokąta. Mamy tu więc do czynienia z ciągiem pól wielokątów wpisanych w dane koło, co oznacza, że liczbom naturalnym począwszy od 3 przypisane zostały pewne liczby rzeczywiste. Te ostatnie nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy zwykle symbolem a_n. ■

Przykład 15.7 Inny przykład rozważał Zenon z Elei, filozof (490-430 p.n.e). Twierdził on mianowicie, że znany w starożytności biegacz Achilles nie jest w stanie dogonić żółwia. Rozważania te przedstawimy oczywiście używając współczesnego języka i stosując współczesne oznaczenia.

Załóżmy na przykład, że początkowa odległość między Achillesem i żółwiem równa jest 100 m. Dla prostoty przyjmiemy, że prędkość Achillesa jest dziesięciokrotnie większa niż prędkość uciekającego żółwia. W jakimś czasie Achilles przebiegnie 100 m. W tym samym czasie żółw przesunie się o 10 m, więc przynajmniej na razie nie zostanie złapany. Po $\frac{1}{10}$ tego czasu Achilles przebiegnie 10 m, jednak znów nie dogoni żółwia, który oddali się o następny metr. Achilles przebiegnie metr, a żółw oddali się o 10 cm itd. Proces ten można kontynuować. Prowadzi to do rozpatrywania coraz dłuższych odcinków przebytych przez Achillesa, czyli liczb: 100 , 110 , 111 , $111{,}1$, $111{,}11$, ... — czyli ciągu, którego wyraz o numerze n jest dany za pomocą wzoru

$$a_n = 100 + 10 + 1 + \ldots + \tfrac{100}{10^{n-1}} = 111{,}1\ldots1$$

— przy czym w zapisie dziesiętnym tej liczby występuje n jedynek. Zenon po prostu nie potrafił zsumować nieskończenie wielu składników. Nie operował pojęciem **sumy nieskończonej**, nie umiano wtedy takiego pojęcia zdefiniować. Tego rodzaju problemy analizowano już wtedy, ale ścisłe definicje matematyczne pojawiły się dopiero w pierwszej połowie XIX w. (Gauss, Cauchy, Bolzano). Możemy łatwo odpowiedzieć na pytanie, jaką odległość przebiegnie Achilles, zanim złapie żółwia: $111,1\ldots = \frac{1000}{9}$.

Na wszelki wypadek podamy formalne rozumowanie, które można było zastosować również w starożytności, jednak bez jawnego użycia pojęcia sumy nieskończonej, a więc omijając istotny problem matematyczno-filozoficzny. Oznaczmy odległość przebytą przez żółwia do momentu zakończenia pogoni przez x. Achilles w tym samym czasie przebiegł odległość $10x$. Różnica tych wielkości to $9x = 100$. Stąd natychmiast wynika, że $x = \frac{100}{9}$, zatem $10x = \frac{1000}{9}$. Oczywiście problemem istotnym było tu obliczenie tzw. granicy ciągu, czym zajmiemy się niebawem. [15.1] ■

Przykład 15.8 Załóżmy, że wpłaciliśmy do banku pewną kwotę k zł. na rachunek płatny na każde żądanie, oprocentowany w stosunku $100x$ w skali rocznej. Załóżmy przy tym, że jeśli bank wypłaca nam pieniądze nie po roku lecz po jego części, np. dwóch miesiącach, to wypłaca nam *odpowiednią* część oprocentowania. Będziemy rozważać sytuację abstrakcyjną nie zwracając uwagi na to, że operacje bankowe nie są wykonywalne momentalnie i że często okres oprocentowania liczy się od dnia następnego po wpłacie. Zastanówmy się jaką kwotę będziemy mogli uzyskać po upływie roku. Banalna odpowiedź to $k+x\cdot k = k(1+x)$. Ta odpowiedź nie jest jednak w pełni satysfakcjonująca, bowiem mogliśmy wyjąć pieniądze z rachunku po pół roku i natychmiast wpłacić je z powrotem. Wtedy po połowie roku otrzymalibyśmy połowę oprocentowania tj. kwotę $k+\frac{1}{2}x\cdot k = k(1+\frac{x}{2})$, a po następnych sześciu miesiącach — kwotę $k(1+\frac{x}{2})+\frac{x}{2}\cdot k(1+\frac{x}{2}) = k(1+\frac{x}{2})^2$, a więc większą od $k(1+x)$ o $k\cdot\frac{x^2}{4}$.

Jeżeli na przykład $k = 1000$ oraz $x = 0{,}1$, co odpowiada oprocentowaniu 10% w skali rocznej, to $k\cdot\frac{x^2}{4} = 2{,}5$, a więc powstała różnica, która co prawda duża nie jest, ale istnieje i przy większych kwotach zaczyna mieć istotne znaczenie. Ważniejsze jest jednak to, że stwierdzenie, że oprocentowanie w skali rocznej jest równe $100x$ zinterpretowaliśmy na dwa różne sposoby i widać wyraźnie, że możemy podać jeszcze inny wynik. Odwiedzajmy np. nasz bank nie co pół roku, lecz co miesiąc (dla prostoty przyjmujemy, że miesiąc to $\frac{1}{12}$ część roku). Rozumując tak jak poprzednio stwierdzamy, że po miesiącu otrzymamy $k(1+\frac{x}{12})$ zł, zaś po 2 miesiącach $k(1+\frac{x}{12})^2$ zł. Oczywiście po trzech miesiącach otrzymujemy kwotę $k(1+\frac{x}{12})^3$, po czterech — $k(1+\frac{x}{12})^4$ itd.

[15.1] Były inne paradoksy związane z problemem dzielenia w nieskończoność na części, np. punkt nie ma długości, odcinek składa się z punktów i ma długość, poruszający się obiekt w nieskończenie krótkim czasie nie przebywa żadnej odległości, a jednak się porusza. Przekonamy się, że dzięki pojęciu granicy daje się w sensowny sposób mówić o tego rodzaju kwestiach nie dochodząc do pozornych sprzeczności.

Po 12 miesiącach wypłacić należałoby $k(1+\frac{x}{12})^{12}$ zł. Gdybyśmy podzielili rok na n równych części, gdzie n oznaczać może dowolną z liczb $1,2,3,\ldots$, to wypłata po upływie m części roku byłaby równa $k(1+\frac{x}{n})^m$ zł, zaś po roku $k(1+\frac{x}{n})^n$ zł. Powstaje więc problem, jak należy liczyć oprocentowanie w tym przypadku, czy rozdrabnianie roku powoduje wzrost wypłat istotny przynajmniej w przypadku dużych kwot, czy też od pewnego momentu zwiększanie częstotliwości operacji już nie powoduje istotnych zmian. Prowadzi to do badania ciągu o wyrazie $k\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. ■

Przykład 15.9 Innym rodzajem ciągu jest tzw. ciąg geometryczny: $a_n = a_0q^n$, gdzie a_0 i q są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego, bo gdy $q \neq 0$ jest równa ilorazowi dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Liczba ludzi w kraju o stałym przyroście naturalnym zachowuje się jak ciąg geometryczny o ilorazie dosyć bliskim jedności — dodatni przyrost naturalny oznacza, że iloraz jest większy niż 1, zaś ujemny przyrost naturalny — że iloraz jest mniejszy niż 1. ■

Przykład 15.10 Jeszcze innym rodzajem ciągu jest ciąg arytmetyczny: $a_n = a_0 + nd$, gdzie a_0 oraz d oznaczają dowolne liczby rzeczywiste. Liczba d zwana jest różnicą ciągu arytmetycznego, jest ona równa różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu. Na początku XIX wieku zaobserwowano, że ilość zboża zachowuje się jak wyraz ciągu arytmetycznego (n jest numerem roku). Oczywiście tego rodzaju obserwacje są przybliżone, bowiem co jakiś czas zdarzają się powodzie, susze i wtedy proces wzrostu ulega zakłóceniu. Bywają też zakłócenia innego rodzaju, np. w XIX zauważono, że stosowanie saletry chilijskiej (później nawozów azotowych) zwiększa w istotny sposób plony. Były też inne zakłócenia ,,naturalnego" tempa wzrostu ilości zbóż. ■

Przykład 15.11 W rękopisie z 1202 r Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, znajduje się następujące zadanie: Ile par królików może być spłodzonych przez parę płodnych królików i jej potomstwo w ciągu roku, jeśli każda para daje w ciągu miesiąca żywot jednej parze, para staje się płodna po miesiącu, króliki nie zdychają w ciągu tego roku. Jasne jest, że po miesiącu mamy już dwie pary przy czym jedna z nich jest płodna, a druga jeszcze nie. Wobec tego po dwóch miesiącach żyją już trzy pary królików: dwie płodne, jedna jeszcze nie. Po trzech miesiącach żyje już pięć par królików: trzy płodne, dwie jeszcze nie. Po czterech miesiącach jest już $8 = 5 + 3$ par królików. Kontynuując to postępowanie stwierdzamy po niezbyt długich obliczeniach, że po upływie roku żyje już $377 = 233 + 144$ par królików. Naturalnym problemem jest: znaleźć wzór na liczbę a_n, jeśli $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ i $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$. Wzór taki został znaleziony dopiero po kilkuset latach od napisania książki przez Fibonacci'ego i wygląda tak:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right).$$

Dowód prawdziwości tego wzoru jest prosty — łatwa indukcja. Jednak powstaje pytanie, jak można tego rodzaju hipotezę sformułować. Jest ono znacznie ważniejsze od dowodu prawdziwości tego wzoru, jednak na razie nie będziemy się tym zajmować. ■

Sumę, różnicę, iloczyn i iloraz dwóch ciągów określamy tak jak działania na funkcjach, tzn. sumą ciągów (a_n) i (b_n) jest ciąg, którego n–ty wyraz równy jest $a_n + b_n$. Różnicą ciągów (a_n) i (b_n) jest ciąg $a_n - b_n$, iloczynem — ciąg $(a_n b_n)$, ilorazem — ciąg $\frac{a_n}{b_n}$, jeśli dla każdego n zachodzi nierówność $b_n \neq 0$.

Definicja 15.2 (ciągów monotonicznych)

Ciąg (a_n) nazywamy niemalejącym (rosnącym) wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) zachodzi dla każdego numeru n. Podobnie ciąg nierosnący (malejący) to taki, że dla każdego numeru n zachodzi nierówność $a_n \geqslant a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$). Ciągi niemalejące i nierosnące mają wspólną nazwę: ciągi monotoniczne. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi. ■

W niektórych podręcznikach stosowana jest nieco inna terminologia: ciągi niemalejące zwane są tam rosnącymi, a rosnące — ściśle rosnącymi. Jest obojętne, która z dwu koncepcji stosujemy, jeśli tylko robimy to konsekwentnie. Można też, dla uniknięcia nieporozumień, mówić o ciągach niemalejących i ściśle rosnących.

Ciąg geometryczny zaczynający się od wyrazu $a_1 = q$ jest monotoniczny w przypadku $q \geqslant 0$: dla $q = 0$ i dla $q = 1$ ciąg geometryczny jest stały, więc niemalejący i jednocześnie nierosnący. Jest malejący, gdy $0 < q < 1$, dla $q > 1$ jest rosnący. Ciąg arytmetyczny jest rosnący, gdy $d > 0$, malejący — gdy $d < 0$, stały (więc jednocześnie niemalejący i nierosnący), gdy $d = 0$.

Definicja 15.3 (ciągów ograniczonych)
Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista M, taka że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność: $a_n \leqslant M$. Analogicznie (a_n) jest ograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista m taka, że dla każdego n zachodzi nierówność $a_n \geqslant m$. Ciąg ograniczony z góry i z dołu nazywamy ograniczonym. Ciągiem nieograniczonym nazywamy ciąg, który nie jest ograniczony. ∎

Ciąg (n) jest ograniczony z dołu np. przez -13 lub 0, ale nie jest ograniczony z góry, więc jest nieograniczony. Ciąg $\big((-1)^n\big)$ jest ograniczony z góry np. przez 1 lub przez $\sqrt{1000}$ oraz z dołu, np. przez -1, ale również przez -13.

Stwierdzenie 15.4 Ciąg (a_n) jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba nieujemna M, taka że $|a_n| \leqslant M$ dla każdego n. ∎

To oczywisty wniosek z definicji ciągu ograniczonego: M musi być tak duże, by liczba $-M$ była ograniczeniem dolnym ciągu (a_n) i jednocześnie liczba M — jego ograniczeniem, górnym.

Ciągi z pierwszych dwóch przykładów są rosnące, ciąg z trzeciego przykładu jest malejący, a ciąg z czwartego przykładu w ogóle nie jest monotoniczny, bowiem:

$$1 > 1 - \tfrac{1}{2} < 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} > 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\,.$$

Ciąg stały jest jednocześnie nierosnący i niemalejący. Ciąg pól wielokątów foremnych wpisanych w dane koło jest rosnący, co wymaga dowodu, który pozostawiamy Czytelnikowi. Ciąg rozpatrywany przez Zenona z Elei jest rosnący. Podobnie ciągu opisujący stan konta bankowego przy stałym oprocentowaniu (dodatnim).

Ciąg geometryczny zaczynający się od wyrazu dodatniego rośnie, gdy jego iloraz jest większy niż 1, maleje — gdy iloraz jest dodatni, ale mniejszy od 1. Jeśli $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg geometryczny o ilorazie q, zaczynający się od a_1 **nie** jest monotoniczny.

Ciągi (n) i (2^n) są ograniczone z dołu, a z góry nie. Ciąg $\frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry przez 1 a z dołu przez 0.

Ciąg o wyrazie $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ jest ograniczony z góry przez liczbę 1, a z dołu przez liczbę $\frac{1}{2}$, co łatwo wynika z tego, że po odjęciu pewnej liczby dodajemy następną, ale mniejszą od odjętej. Łatwo więc widać, że w tym przypadku spełnione są nierówności: $a_1 > a_3 > a_4 > \dots$, $a_2 < a_4 < a_6 < \dots$ oraz $a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 > \dots$

Zdefiniujemy granicę ciągu — pojęcie wspomniane przy omawianiu paradoksu Zenona. Pojawią się od razu trzy przypadki.

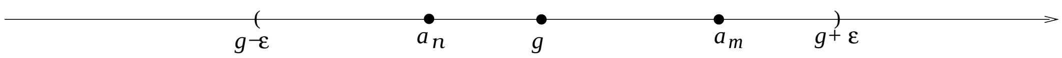
Definicja 15.5 (granicy ciągu)

a. Liczba g nazywana jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby dodatniej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba całkowita n_ε, taka że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.

b. $+\infty$ (czytaj: plus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeżeli $n > n_M$, to spełniona jest nierówność $a_n > M$.

c. $-\infty$ (czytaj: minus nieskończoność) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje liczba całkowita n_m taka, że jeśli $n > n_M$, to spełniona jest nierówność $a_n < M$.

Jeśli g jest granicą ciągu (a_n), skończoną lub nie, to piszemy $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ lub $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$. Można też pisać $a_n \to g$, gdy $n \to \infty$ lub krótko $a_n \to g$. Mówimy, że ciąg jest zbieżny, jeśli jego granica jest skończona. ■



granica ciągu i jego wyrazy, gdy m,n są „duże”

Symbole $\pm\infty$ nie oznaczają liczb. Wprowadzamy je, by uprościć sposób mówienia o ciągach. Zakładamy oczywiście, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $-\infty < x < \infty$, ale to zdanie ją definiuje, bo ona z niczego nie wynika, gdyż symbole $\pm\infty$ dopiero wprowadziliśmy.

Umowa 15.6
Jeżeli jakaś własność przysługuje wszystkim wyrazom ciągu z wyjątkiem skończenie wielu, to mówimy, że przysługuje ona *prawie wszystkim* wyrazom ciągu lub, że zachodzi dla *dostatecznie dużych* numerów n. ■

Przyjąwszy tę umowę możemy wypowiedzieć definicję granicy ciągu tak: liczba g jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, dla prawie wszystkich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Podobnie można wypowiedzieć definicję granicy w pozostałych przypadkach, co Czytelnik powinien zrobić samodzielnie.

O granicy skończonej ciągu można myśleć, że jest to liczba, którą każdy dostatecznie daleki wyraz ciągu (a_n) przybliża z dopuszczalnym (czyli mniejszym niż ε) błędem. Nie to jest całkiem precyzyjne, ale za to dosyć obrazowe sformułowanie.

Przykład 15.12 Ciąg stały jest zbieżny, dokładniej: jeśli $a_n = c$ dla wszystkich liczb naturalnych n, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. ■

Przykład 15.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Udowodnimy tę równość. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z zasady Archimedesa wynika, że istnieje liczba naturalna $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Jeśli $n > n_\varepsilon$, to $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$, więc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. ■

Przykład 15.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Mamy $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Jeśli więc $\varepsilon > 0$, to dla $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ i $n > n_\varepsilon$ mamy $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. ■

Przykład 15.15 Jeśli $d > 0$, to $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} (a_0 + nd)$. Wykażemy tę równość. Jeśli $M \in \mathbb{R}$, $n_\varepsilon > \frac{M-a_0}{d}$ oraz $n > n_\varepsilon$, to $n > \frac{M-a_0}{d}$, zatem $a_n = a_0 + nd > M$, co uzasadnia prawdziwość równości, którą dowodzimy. ■

Twierdzenie 15.7 (o granicy ciągu geometrycznego)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } |q| < 1; \\ 1 & \text{jeśli } q = 1; \\ +\infty & \text{jeśli } q > 1. \end{cases}$$

Jeśli $q \leqslant -1$, to ciąg (q^n) granicy nie ma.

Dowód. Wykażemy to twierdzenie. W przypadku $q = 0$ oraz $q = 1$ teza jest oczywista, bo ciąg jest stały (jego wyrazy nie zależą od numeru).

Załóżmy teraz, że $0 < |q| < 1$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Jeśli $n_\varepsilon > \dfrac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|q|} - 1}$ jest liczbą całkowitą i $n > n_\varepsilon$, to z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(1 + \left(\tfrac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n \geqslant 1 + n(\tfrac{1}{|q|} - 1) > 1 + \tfrac{1}{\varepsilon} - 1 = \tfrac{1}{\varepsilon}.$$

Wobec tego dla $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $\frac{1}{|q|^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, czyli $|q^n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Kolejny przypadek to $q > 1$. Mamy teraz

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geqslant 1 + n(q-1).$$

Jeśli więc $n > n_M$ i $n_M > \frac{M-1}{q-1}$, to $q^n > 1 + (M-1) = M$. Jasne jest więc, że $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Pozostał przypadek ostatni: $q \leqslant -1$. Teraz mamy $q^n \leqslant -1$ dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n oraz $q^n \geqslant 1$ dla każdej liczby całkowitej parzystej n. Gdyby ciąg miał skończoną granicę g, to jego wyrazy o dostatecznie dużych numerach leżałyby w odległości mniejszej niż 1 od granicy g — to natychmiastowa konsekwencja istnienia granicy skończonej. Jeśli jednak odległości q^n i q^{n+1} od granicy g są mniejsze od 1, to odległość między nimi jest mniejsza niż $1+1=2$, co oznacza, że $|q^n - q^{n+1}| < 2$. To nie jest możliwe, bo jedna z liczb q^n, q^{n+1} jest mniejsza lub równa -1, a druga — większa lub równa 1. Stąd zaś wynika, że odległość między q^n i q^{n+1} to co najmniej $1-(-1) = 2$. [15.2] Otrzymaliśmy sprzeczność, więc ciąg granicy skończonej nie ma.

[15.2] Można to rozumowanie zapisać wzorami: $2 \leqslant |q^n - q^{n+1}| \leqslant |q^n - g| + |g - q^{n+1}| < 1+1 = 2$ dla dostatecznie dużych n.

$+\infty$ granicą tego ciągu też nie jest, bowiem wtedy wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach byłyby większe od 0 (przyjmujemy $M=0$), a tak nie jest, bo te, których numery są *nieparzyste*, są ujemne.

$-\infty$ nie jest granicą tego ciągu, bo wyrazy o numerach *parzystych* są dodatnie, więc wyrazy o dostatecznie dużych numerach nie są ujemne (i w tym przypadku przyjmujemy $M=0$).

Ciąg nie ma więc ani granicy skończonej, ani nieskończonej, co kończy badanie granicy ciągu geometrycznego. ■

Twierdzenie 15.8
Dla każdej liczby $a\in(0,\infty)$, zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Dowód. Załóżmy na razie, że $a\geqslant 1$. Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Chcemy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$, czyli że $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. Ponieważ $a\geqslant 1$, więc nierówność podwójna sprowadza się do nierówności $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$, czyli do nierówności $a<(1+\varepsilon)^n$, a ta wynika z nierówności $a<1+n\varepsilon$, bo $1+n\varepsilon<(1+\varepsilon)^n$ — nierówność Bernoulli'ego. Wystarczy więc, by spełniona była nierówność $n_\varepsilon>\frac{a-1}{\varepsilon}$. To kończy dowód w przypadku $a\geqslant 1$.
Załóżmy teraz, że $0<a<1$ i $0<\varepsilon<1$. Mamy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n spełniona jest nierówność $\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$, czyli że $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$. Ponieważ $a<1$, więc wystarczy dowieść, że nierówność $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}$, czyli $(1-\varepsilon)^n<a$ dla prawie wszystkich n. To jednak wynika od razu z twierdzenia o granicy ciągu geometrycznego, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0$. ■

Przykład 15.16 (Obliczanie pierwiastka kwadratowego)
Niech a i b oznaczają dowolne liczby rzeczywiste dodatnie. Zdefiniujemy ciąg (a_n) wzorami: $a_1=b$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$. Wykażemy, że dla każdej liczby $b>0$ zachodzi wzór $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

Dowód. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $a_n>0$ — łatwiutka indukcja. Mamy również $a_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$, bowiem $a_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{1}{2a_n}(a_n^2-2a_n\sqrt{a}+a)=$

$=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{a})^2 \geqslant 0$. Wobec tego dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $\frac{a}{a_n} \leqslant \sqrt{a}$ i wobec tego

$$0 \leqslant a_{n+1}-\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\big(a_n+\tfrac{a}{a_n}\big)-\sqrt{a} \leqslant$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}\big(a_n+\sqrt{a}\big)-\sqrt{a} = \tfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{a}).$$

Z otrzymanej nierówności wynika, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $0 \leqslant a_n-\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}\big(a_2-\sqrt{a}\big)$. Dowodzona teza wynika od razu z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ — twierdzenie o granicy ciągu geometrycznego. ■

Uwaga 15.9

Ciąg z poprzedniego przykładu jest ,,szybko" zbieżny do liczby $\sqrt{a}$ i dobrze nadaje się do obliczania pierwiastków kwadratowych. ■

Po przykładach kolej na kilka łatwych, ale bardzo ważnych stwierdzeń, często ułatwiających obliczanie granic.

Wprowadziliśmy wcześniej symbole $+\infty$ oraz ∞. **Zdefiniujemy** działania z ich użyciem (przypominamy, że $\pm\infty \notin \mathbb{R}$).

Definicja 15.10 (działań z użyciem symboli $\pm\infty$)

15.10.1 $-(+\infty)=-\infty$, $+(+\infty)=+\infty$, $-(-\infty)=+\infty$, $+(-\infty)=-\infty$.

15.10.2 $+\infty \pm a = \pm a + (+\infty) = +\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

15.10.3 $-\infty \pm a = \pm a + (-\infty) = -\infty$ dla każdej liczby rzeczywistej a.

15.10.4 $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

15.10.5 $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$.

15.10.6 $+\infty \cdot a = +\infty$ i $-\infty \cdot a = -\infty$ dla każdego $a > 0$.

15.10.7 $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$.

15.10.9 $+\infty \cdot a = -\infty$ i $-\infty \cdot a = +\infty$ dla każdego $a < 0$.

15.10.9 $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

15.10.10 $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \cdot \frac{1}{a}$ dla dowolnej liczby $a \neq 0$.

15.10.11 $a^{+\infty} = +\infty$, $a^{-\infty} = 0$ dla dowolnej liczby $a > 1$.

15.10.12 $a^{+\infty} = 0$ i $a^{-\infty} = +\infty$ dla dowolnej liczby $0 < a < 1$.

15.10.13 $-\infty < a < +\infty$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a.

15.10.14 $-\infty < +\infty$. ■

Nie definiujemy symboli, których na tej liście nie ma, np. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\cdot(\pm\infty)$, $1^{\pm\infty}$ i innych. Przyczyny, dla których nie wprowadzamy szerszej definicji, staną się jasne niebawem — okaże się, że nie ma sensownej drogi zdefiniowania tych *symboli nieoznaczonych.* Definiujemy je po to, by można było prosto sformułować twierdzenia o obliczaniu granic, które wkrótce udowodnimy.

Podamy teraz kilka twierdzeń, które ułatwiają obliczanie granic, ich szacowanie lub stwierdzanie ich istnienia. Potem pokażemy jak można je stosować.

Uwaga 15.11 (o zbieżności ciągu przeciwnego)
Ciąg (c_n) ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(-c_n)$ ma granicę. Zachodzi wtedy równość $\lim\limits_{n\to\infty}(-c_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Zdanie to jest prawdziwe niezależnie od tego, czy granica jest skończona, czy nieskończona. Wynika to wprost z definicji granicy ciągu. ■

Twierdzenie 15.12 (o szacowaniu)

15.12.1 Jeśli $C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n spełniona jest nierówność $C < a_n$.

15.12.2 Jeśli $C > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to dla dostatecznie dużych numerów n spełniona jest nierówność $C > a_n$.

15.12.3 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, to $b_n < a_n$ dla dostatecznie dużych n.

15.12.4 Jeśli $b_n \leqslant a_n$ dla dostatecznie dużych n, to zachodzi nierówność $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dowód. Zaczniemy od 15.12.1. Liczba C jest mniejsza od granicy ciągu (a_n). Wykażemy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $C < a_n$. Załóżmy najpierw, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. Ponieważ $-\infty < C$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > C$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Z definicji od razu wynika, że dla każdej liczby rzeczywistej M, w tym $M = C$ i dostatecznie dużych n, zachodzi nierówność $a_n > M$.

Przejdźmy do następnego przypadku: granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona. Niech $\varepsilon = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - C$. Z definicji od razu wynika, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $|a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n| < \varepsilon$, więc $a_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon = C$.

W taki sam sposób dowodzimy 15.12.2 — zmieniamy jedynie kierunki części nierówności i zastępujemy symbol $+\infty$ przez $-\infty$.

Teraz załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Niezależnie od tego, czy granice są skończone, czy nieskończone, istnieje taka liczba C, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n < C < \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Na mocy już udowodnionej części twierdzenia dla dostatecznie dużych numerów n zachodzą nierówności $b_n < C$ oraz $C < a_n$. Z nich wynika od razu, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n mamy $b_n < a_n$, co kończy dowód własności 15.12.3.

Załóżmy, że dla dostatecznie dużych numerów n zachodzi nierówność $b_n \leqslant a_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Jeśli ta nierówność nie jest spełniona, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Stąd jednak wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $b_n > a_n$, która przeczy założeniu. Zakończyliśmy dowód twierdzenia o szacowaniu. ■

Wniosek 15.13 (o jednoznaczności granicy)
Ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

Dowód. Gdyby miał dwie np. $g_1 < g_2$, to wybrać moglibyśmy liczbę C leżącą między g_1 i g_2: $g_1 < C < g_2$. Wtedy dla dostatecznie dużych n byłoby jednocześnie $a_n < C$ (zob. 15.12.2) oraz $a_n > C$ (zob. 15.12.1), co oczywiście nie jest możliwe. ■

Wniosek 15.14 (o ograniczoności ciągu zbieżnego)
Jeśli granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jest skończona, to istnieją takie liczby rzeczywiste C, D, że nierówność $C < a_n < D$ zachodzi dla **wszystkich** n: liczba C ogranicza ciąg (a_n) z dołu, liczba D — z góry.

Dowód. Wykażemy, że ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony z góry i z dołu. Niech c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $c < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < d$. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n, powiedzmy większych od odpowiednio dobranej liczby m, zachodzi nierówność $c < a_n < d$. Wystarczy przyjąć, że C jest najmniejszą z liczb a_0, a_1, ..., a_m, c, by dla **wszystkich** liczb naturalnych n było $C \leqslant a_n$. Podobnie przyjmujemy, że D jest największą z liczb a_0, a_1, ..., a_m, d — wtedy $a_n \leqslant D$ dla **wszystkich** liczb naturalnych n. Dowód wniosku został zakończony. ■

Uwaga. 15.15 (o kłopotach z nieskończonością)
Ten dowód jest bardzo prosty. Proszę jednak zwrócić uwagę na to, że **spośród skończenie wielu liczb można zawsze wybrać najmniejszą** a spośród nieskończenie wielu już niekoniecznie, np. wśród liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ najmniejszej nie ma! ■

Twierdzenie 15.16 (o arytmetycznych własnościach granicy)

15.16.1 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich suma, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.2 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określona jest ich różnica, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.3 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloczyn, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$ i zachodzi wzór: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

15.16.4 Jeśli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i określony jest ich iloraz, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dowód. Udowodnimy, że suma granic dwóch ciągów jest granicą sumy tych ciągów. Załóżmy, że $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Należy rozważyć trzy przypadki: g_a, g_b są liczbami rzeczywistymi, g_a jest liczbą rzeczywistą zaś g_b jest symbolem nieskończonym, g_a, g_b są symbolami nieskończonymi tego samego znaku.

Rozpoczniemy od granic skończonych. Niech ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech n'_ε będzie taką liczbą naturalną, że dla $n > n'_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Niech n''_ε będzie taką liczbą naturalną, że nierówność $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2}$ zachodzi dla

$n > n''_\varepsilon$ i niech n_ε oznacza większą z liczb $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon$. Wtedy dla $n > n_\varepsilon$ zachodzą obydwie nierówności, zatem

$$|a_n + b_n - (g_a + g_b)| \leqslant |a_n - g_a| + |b_n - g_b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Znaczy to, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n (czyli $n > n_\varepsilon$) różnica $(a_n+b_n)-(g_a+g_b)$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż ε. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g_a + g_b$. Dowód twierdzenia o granicy sumy ciągów w tym przypadku został zakończony.

Zajmiemy się teraz następnym przypadkiem: niech **liczba** g będzie granicą ciągu (a_n) i niech $+\infty = = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Niech M będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Można znaleźć taką liczbę naturalną n''_{M-g+1}, że dla $n > n''_{M-g+1}$ zachodzi nierówność $b_n > M - g + 1$. Istnieje też taka liczba naturalna n'_1, że dla $n > n'_1$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < 1$. Niech n_M będzie większą z liczb n''_{M-g+1} i n'_1. Dla $n > n_M$ zachodzą obie nierówności, więc

$$a_n + b_n = b_n + g + (a_n - g) \geqslant b_n + g - |a_n - g| >$$
$$> (M - g + 1) + g - 1 = M.$$

Wykazaliśmy, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $a_n + b_n > M$, więc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Jeśli więc ciąg (a_n) ma granicę skończoną i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, to na mocy poprzednio wykazanej części twierdzenia o granicy sumy ciąg $\big(-a_n + (-b_n)\big)$ ma granicę i zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n - b_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-b_n) = +\infty.$$

Z uwagi o granicy ciągu przeciwnego wynika, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ i $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) - \infty$. Dowód został zakończony.

Został jeszcze jeden przypadek: obie granice są równe $+\infty$ lub obie są równe $-\infty$. Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego wynika, że udowodnić tezę, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli M jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieją liczby naturalne $n'_{M/2}$ oraz $n''_{M/2}$ takie, że jeśli $n > n'_{M/2}$, to $a_n > \frac{M}{2}$, zaś jeśli $n > n''_{M/2}$, to $b_n > \frac{M}{2}$. Przyjmijmy, że n_M jest większą z liczb $n'_{M/2}$, $n''_{M/2}$ i $n > n_M$. Wtedy zachodzą obie nierówności i wobec tego $a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. Dowód został zakończony.

Z uwagi o zbieżności ciągu przeciwnego i twierdzenia o granicy sumy (15.16.1) wynika twierdzenie o granicy różnicy (15.16.2).

Zajmiemy się teraz iloczynem. Podobnie jak poprzednio jest wiele przypadków, których liczbę można zredukować stosując uwagę o zbieżności ciągu przeciwnego do następujących: obie granice są skończone, obie granice są równe $+\infty$, jedna granica jest dodatnią liczbą rzeczywistą a druga jest nieskończona, np. $+\infty$.

Rozpoczniemy od rozpatrzenia granicy iloczynu dwóch ciągów mających skończone granice. Z twierdzenia o szacowaniu wynika, że każdy z tych ciągów jest ograniczony, więc istnieje taka liczba $K' > 0$, że $|a_n| \leqslant K'$ i istnieje też taka liczba $K'' > 0$, że $|b_n| < K''$ dla każdej liczby naturalnej n. Przyjmując, że K to większa z liczb K', K'' znajdujemy liczbę, której nie przekracza wartość bezwzględna żadnego wyrazu któregokolwiek z dwóch rozpatrywanych ciągów: $|a_n|, |b_n| \leqslant K$. Oznaczmy $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Z twierdzenia o szacowaniu wnioskujemy, że również $|g_a|$, $|g_b| \leqslant K$. Niech ε oznacza dowolną liczbę dodatnią. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n_ε, że jeżeli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g_a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ i jednocześnie $|b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Wtedy

$$|a_n b_n - g_a g_b| = |(a_n - g_a)b_n + g_a(b_n - g_b)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n - g_a| \cdot |b_n| + |g_a| \cdot |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.$$

Udowodniliśmy więc, że dla dostatecznie dużych n odległość liczby $a_n b_n$ od liczby $g_a g_b$ jest mniejsza niż ε, co oznacza, że $g_a g_b = \lim\limits_{n\to\infty}\big(a_n \cdot b_n\big)$, a to właśnie było naszym celem.

Teraz zajmiemy się granicą iloczynu ciągów, z których jeden ma granicę skończoną i dodatnią, a drugi — granicę $+\infty$. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ będzie liczbą dodatnią i niech $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Niech M będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z definicji granicy wynika, że istnieje taka liczba naturalna n_M, że jeżeli $n > n_M$,

to $a_n > \frac{1}{2}g_a > 0$ i $b_n > \frac{2|M|}{g_a} > 0$. Wtedy
$$a_n b_n > \frac{1}{2}g_a \frac{2|M|}{g_a} = |M| \geqslant M\,.$$
Dowód w tym przypadku został zakończony.

Rozpatrzymy teraz iloczyn dwóch ciągów (a_n) i (b_n) zakładając, że spełniona jest równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Jeśli M jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje liczba naturalna n_M, taka że dla $n > n_M$ zachodzą nierówności $a_n > 1 + |M|$ i $b_M > 1 + |M|$. Wtedy dla $n > n_M$ mamy
$$a_n b_n > (1 + |M|)^2 > 2 \cdot |M| \geqslant |M| \geqslant M\,,$$
co dowodzi równości $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$. Twierdzenie o granicy iloczynu ciągów zostało w ten sposób udowodnione.

Kolej na twierdzenie o granicy ilorazu. Znów zaczniemy od granic skończonych. Niech $g_a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $0 \neq g_b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g_a}{g_b}$. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Z poczynionych założeń wynika, że istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to
$$|b_n| > \frac{|g_b|}{2}\,, \quad |a_n - g_a| < \frac{\varepsilon \cdot |g_b|}{4}\,, \quad |b_n - g_b| < \frac{\varepsilon \cdot |g_b|^2}{4(|g_a|+1)}\,.$$ [15.3]

Dla $n > n_\varepsilon$ mamy więc
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{g_a}{g_b}\right| = \frac{|a_n g_b - g_a b_n|}{|g_b b_n|} \leqslant \frac{|a_n g_b - g_a g_b| + |g_a g_b - g_a b_n|}{|g_b|^2/2} =$$
$$= \frac{2}{|g_b|}|a_n - g_a| + \frac{2|g_a|}{|g_b|^2}|g_b - b_n| < \varepsilon.$$
Udowodniliśmy tezę w przypadku granic skończonych. Jeżeli ciąg (b_n) ma granicę skończoną i różną od 0 oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to ciąg $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ ma granicę skończoną i różną od 0 – wynika to z już udowodnionej części twierdzenia o granicy ilorazu. W tym przypadku można zastosować twierdzenie o granicy iloczynu ciągów:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\,.$$
Ten ostatni iloczyn jest oczywiście dobrze określony.

Został jeszcze jeden przypadek: granica ciągu (a_n) jest skończona, a granica ciągu (b_n) jest nieskończona. W tym przypadku

[15.3] Nie założyliśmy, że $g_a \neq 0$, więc w mianowniku umieściliśmy $|g_a|+1$.

ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. istnieje taka liczba $K > 0$, że dla każdego n zachodzi nierówność $|a_n| < K$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|b_n| > \frac{K}{\varepsilon}$. Wtedy $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Wykazaliśmy więc, że dla dostatecznie dużych n iloraz $\frac{a_n}{b_n}$ ma wartość bezwzględną mniejszą niż ε. Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dowód został zakończony. ■

Twierdzenie 15.17 (o trzech ciągach)
Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla dostatecznie dużych n, ciągi (a_n) i (c_n) mają **równe** granice, to ciąg (b_n) też ma granicę i zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n .$$

Dowód. Wiemy, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność podwójna $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz że ciągi a_n i c_n mają wspólną granicę g. Mamy dowieść, że ta wspólna granice jest również granicą ciągu (b_n). Załóżmy najpierw, że granica g jest skończona. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$ oraz $|c_n - g| < \varepsilon$. Wynika stąd, że $g - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \varepsilon$, zatem $|b_n - g| < \varepsilon$. Udowodniliśmy więc, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Teraz możemy się zająć przypadkiem granicy nieskończonej. Jak zwykle wystarczy zająć się jedną z dwu nieskończoności, tym razem dla odmiany $g = -\infty$. Niech M będzie liczbą rzeczywistą. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, więc istnieje taka liczba naturalna n_M, że dla $n > n_M$ zachodzi nierówność $b_n \leqslant c_n < M$, więc w szczególności $b_n < M$. Dowód został zakończony. ■

Uwaga 15.18 (o twierdzeniu o trzech ciągach)
Z dowodu wynika, że w przypadku granicy nieskończonej, np. równej $-\infty$, użycie jednego z dwóch zewnętrznych ciągów, w tym przypadku ciągu (a_n), jest zbędne. Prawdziwe jest twierdzenie:

jeśli dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n \leqslant c_n$ i ciąg (c_n) ma granicę $-\infty$, to również ciąg (b_n) ma granicę $-\infty$ i analogicznie: jeśli dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$a_n \leqslant b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, to również $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ■

Uwaga 15.19 Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to istnieje też $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ i zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. To stwierdzenie wynika od razu z definicji granicy, można użyć tej samej liczby n_ε lub n_M, jeśli granica jest nieskończona. ■

Definicja 15.20 (podciągu)
Jeśli (a_n) jest dowolnym ciągiem i $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, to ciąg a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, $\ldots$, czyli ciąg $(a_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ nazywamy podciągiem ciągu (a_n). ■

Zachodzi bardzo przydatne i łatwe twierdzenie wiążące zbieżność ciągu ze zbieżnością jego podciągów.

Twierdzenie 15.21 (o podciągach)
$g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą każdego jego podciągu.
Dowód. Ponieważ ciąg jest swoim podciągiem, więc ze zbieżności wszystkich podciągów ciągu (a_n) wynika natychmiast zbieżność ciągu (a_n).

Załóżmy teraz, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i że numeracja wyrazów naszego ciągu zaczyna się od liczby 1. Wtedy spełnione są nierówności $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant n_1 + 1 \geqslant 2$, $n_3 \geqslant n_2 + 1 \geqslant 3$ itd. Ogólnie $n_m \geqslant m$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $n > n_\varepsilon$, to $|a_n - g| < \varepsilon$. W szczególności $|a_{n_m} - g| < \varepsilon$ dla $m > n_\varepsilon$, a stąd bez trudu wnioskujemy, że $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m} = g$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 15.17 Ciąg $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ nie ma granicy, bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \neq$

$$\neq -1 = \lim_{n\to\infty} \left(-1 + \tfrac{1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{2n+1} + \tfrac{1}{2n+1}\right)$$

— wskazaliśmy dwa podciągi zbieżne do **różnych** granic. ■

Twierdzenie 15.22 (o granicy ciągu monotonicznego)
Każdy ciąg monotoniczny ma granicę; jeśli jest ograniczony, to

granica jest skończona.

Dowód. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że ciąg (a_n) jest niemalejący: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$. Jeśli ten ciąg jest ograniczony z góry, to kres górny zbioru jego wyrazów jest skończony. Niech $g = \sup\{a_n\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$. Jeśli $\varepsilon > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n_ε, że $g - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant g$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $g - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant g$. Wykazaliśmy, że wszystkie wyrazy ciągu o dostatecznie dużych numerach leżą w odległości mniejszej niż ε od g. Stąd i z definicji granicy ciągu wynika od razu, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Jeśli ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, to dla każdej liczby rzeczywistej M istnieje taki numer n_M, że $a_{n_M} > M$. Wtedy dla $n > n_M$ zachodzi nierówność $a_n \geqslant a_{n_m} > M$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dowód dla ciągu nierosnącego Czytelnik przeprowadzi sam lub skorzysta z tego, co już udowodniliśmy dla ciągu $(-a_n)$. ■

Przykład 15.18 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+7n-13}{5n^2-17n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+7/n-13/n^2}{5-17/n+1/n^2} =$
$\xlongequal[\text{ilorazu}]{\text{tw. o granicy}} \frac{\lim(1+7/n-13/n^2)}{\lim(5-17/n+1/n^2)} \xlongequal[\text{różnicy i iloczynu}]{\text{tw. o granicy sumy,}}$
$= \frac{1+7\cdot\lim(1/n)-13\cdot\lim(1/n)^2}{5-17\cdot\lim(1/n)+\lim(1/n)^2} = \frac{1+7\cdot 0-13\cdot 0^2}{5-17\cdot 0+)^1} = \frac{1}{5}$.

Przykład 15.19 Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Oczywiście spełniona jest nierówność $a_n < a_{n+1}$, czyli ciąg (a_n) jest ściśle rosnący. Ma więc granicę. Wykażemy, że jest ona skończona. Dla $n \geqslant 2$ mamy $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + {}$ $+ \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n} < 2$. Wobec tego granica ta jest skończona i nie przekracza liczby 2. Znalezienie tej granicy to jednak problem zupełnie innej natury i na razie zajmować się nim nie będziemy. Czytelnik zechce wykazać, że granica jest mniejsza od liczby $\frac{7}{4}$ i zechce wskazać jeszcze mniejszą liczbę M dla której nierówność $a_n < M$ jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych n. ■

Przykład 15.20 Wykażemy jeszcze raz, że jeśli $a \geqslant 1$, to

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Zauważmy najpierw, że $\sqrt[n]{a} \geqslant \sqrt[n+1]{a}$ i $\sqrt[n]{a} \geqslant 1$ dla każdej liczby naturalnej n, więc badany ciąg jest nierosnący i ograniczony z dołu przez 1, zatem ma granicę g i $g \geqslant 1$. Każdy jego podciąg jest zbieżny do liczby g, m.in. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a} = g$. Wobec tego $g = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{a}\right)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a}\right)^2 = g^2$. Jeśli $g = g^2$, to $g = 0$ lub $g = 1$, co w połączeniu z nierównością $g \geqslant 1$ prowadzi do wniosku, że $g = 1$. ■

W ostatnim przykładzie pokazaliśmy, jak można ominąć konkretne szacowania. Zastąpiliśmy je twierdzeniem, które gwarantuje istnienie granicy ciągu. Potem pojawiło się równanie, którego pierwiastkiem była granica. Tak postępujemy dosyć często.

Przykład 15.21 Niech $a > 0$ i $b > 0$ oznaczają liczby rzeczywiste. Niech $a_1 = b$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Z nierówności o średniej arytmetycznej i geometrycznej wnioskujemy, że dla każdego numeru n zachodzi $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}$. Wobec tego dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $a_n \geqslant \sqrt{a}$, więc również $a_n \geqslant \frac{a}{a_n}$. Stąd wynika, że $a_{n+1} \in \left[\frac{a}{a_n}, a_n\right]$ — średnia dwu liczb leży między nimi. Stąd w szczególności wynika, że $a_{n+1} \leqslant a_n$ dla $n = 2, 3, \ldots$ Ciąg (a_n) ma więc granicę i to nie mniejszą niż $\sqrt{a}$. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Wtedy

$$g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{a}{a_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{a}{a_n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(g + \tfrac{1}{g}\right),$$

zatem $g = \frac{1}{2}\left(g + \frac{a}{g}\right)$, więc $\frac{1}{2}g = \frac{a}{2g}$, czyli $g^2 = a$. Stąd i z nierówności $g \geqslant \sqrt{a} > 0$, wynika, że $g = \sqrt{a}$. ■

Przykład 15.22 Zajmowaliśmy się już ciągiem, którego wyraz jest równy $e_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Wykażemy teraz, że dla każdej liczby rzeczywistej x ciąg ten jest niemalejący **od pewnego momentu**, mianowicie jeśli $n > -x$, to $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$. Potem wykażemy, że jest on ograniczony. Nierówność $n > -x$ równoważna jest nierówności $n+x > 0$, z tej z kolei wynika, że $n+1+x > 0$. Wobec tego $1 + \frac{x}{n} = \frac{n+x}{n} > 0$ i analogicznie $1 + \frac{x}{n+1} > 0$. Wobec tego jeśli $n > -x$, to liczby $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ i $\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ są dodatnie, a wobec tego nierówność $e_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}$ jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leqslant \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^{n+1}} = \left(1+\frac{\frac{x}{n+1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.$$

Teraz skorzystamy z nierówności Bernoulli'ego:

$$\left(1+\tfrac{-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\tfrac{-x}{(n+1)(n+x)} = \tfrac{n}{n+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

Skorzystać wolno, bo jeśli $n > -x$, to $\frac{-x}{(n+1)(n+x)} > -1$ — ta nierówność jest prawdziwa dla $x < 0$, bo wtedy licznik i mianownik są dodatnie, a gdy $x \geqslant 0$, to $0 \leqslant \frac{x}{n+x} < 1$. Wobec tego udowodniliśmy monotoniczność ciągu (e_n) od pewnego miejsca. Wynika stąd, że ma on granicę, choć być może nieskończoną. Jeśli $x \leqslant 0$, to dla $n > -x$ zachodzi nierówność $0 \leqslant 1+\frac{x}{n} \leqslant 1$, więc $0 \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$. W tym przypadku ciąg jest ograniczony z góry przez liczbę 1, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$, a ponieważ ten ciąg od pewnego miejsca **rośnie** i ma dodatnie wyrazy, więc $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$. Załóżmy teraz, że $x > 0$. Mamy więc

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \frac{(1-\frac{x^2}{n^2})^n}{(1-\frac{x}{n})^n}.$$

Wykażemy, że istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Ponieważ $0 < \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n \leqslant 1$, więc z twierdzenia o granicy ilorazu wyniknie, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ jest skończona.

Jeśli $n > x > 0$, to $-\frac{x^2}{n^2} > -1$, więc

$$1 > \left(1-\tfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1+n\left(-\tfrac{x^2}{n^2}\right) = 1-\tfrac{x^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n}$. ■

Podamy teraz bardzo ważną definicję.

Definicja 15.23 (liczby e)
$e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ■

Uwaga 15.24 Ciąg o wyrazie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest niemalejący [15.4], więc dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność $e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, np. $e \geqslant \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2\frac{113}{256} > 2\frac{2}{5} = 2{,}4$. Z dwu równości $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ i $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ wynika, że $e = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$, przy czym z tego, że ciąg o wyrazie $(1-\frac{1}{n})^n$ jest niemalejący wynika, że ciąg o wyrazie $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$ jest nierosnący, zatem dla każdej liczby $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e \leqslant \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}$, np. $e \leqslant \dfrac{1}{(1-\frac{1}{6})^6} = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6\cdot5}{1\cdot2\cdot5^2} + \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot5^3} +$
$+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5^4} + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot5^5} + \frac{1}{5^6} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{10} + \frac{4}{5^2} + +\frac{3}{5^3} + \frac{6}{5^5} + \frac{1}{5^6} =$
$=1 + 1{,}2 + 0{,}6 + 0{,}16 + 0{,}024 + 0{,}00192 + 0{,}000064 = 2{,}985984$, więc wykazaliśmy, że $2,4 < e < 3$. Ten rezultat jest niedokładny. Można przekonać się, że $e \approx 2{,}718281828$, ale nie będziemy teraz przybliżać dokładniej, bo później osiągniemy lepsze wyniki znacznie mniejszym nakładem pracy. Dodajmy, że e nie jest liczbą wymierną (to wiedział już L.Euler, 1707-1783), o czym będziemy w stanie przekonać się wkrótce. Można też wykazać, że e to liczba przestępna, więc taka, która **nie** jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Ostatnie stwierdzenie jest trudniejsze (C.Hermite, 1822 -1901). Liczba e jest jedną z najważniejszych w matematyce, występuje w wielu sytuacjach i nie sposób wyobrazić sobie matematyki bez niej. ■

Przykład 15.23 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $1 \leqslant \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$. Oszacujemy wyraz

[15.4] tyle udowodniliśmy, ale później okaże się, że jest ściśle rosnący.

ciągu z góry. Zastosujemy nierówność Bernoulliego. Mamy

$$1<\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right)^n=\frac{1}{(1-\frac{1}{n^2+1})^n}\leqslant\frac{1}{1-\frac{n}{n^2+1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\,.$$

Obiecana teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ■

Przykład 15.24 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ dla dowolnych liczb $x,y\in\mathbb{R}$. Udowodnimy ten wzór. Niech $n>2|x|+2|y|$. Wtedy liczby $1+\frac{x}{n}$, $1+\frac{y}{n}$ i $1+\frac{x+y}{n}$, są dodatnie. Wystarczy udowodnić, że $1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n$. Z nierówności $n>2|x|+2|y|$ wynika, że $1+\frac{x+y}{n}>\frac12$ i $\left|\frac{xy}{n^2}\right|<\frac14$, zatem $\left|\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right|<\frac12$. Z nierówności Bernoulli'ego wynika, że

$$\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n\geqslant 1+n\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}=1+\frac{\frac{xy}{n}}{1+\frac{x+y}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\,.$$

Mamy też $\left|\frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right|<\frac{\frac{1}{2^2}}{(1-\frac12)(1-\frac12)}=1$, zatem

$$\frac{(1+\frac{x+y}{n})^n}{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}=\left(1-\frac{\frac{xy}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\right)^n\geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{\frac{xy}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}\xrightarrow[n\to\infty]{}1\,.$$

Wobec tego zachodzi nierówność:

$$1+\frac{\frac{xy}{n}}{1+\frac{x+y}{n}}\leqslant\frac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n}\leqslant\frac{1}{1-\frac{\frac{xy}{n}}{(1+\frac{x}{n})(1+\frac{y}{n})}}\,.$$

Z niej i twierdzenia o trzech ciągach wynika, że zachodzi równość $1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}{(1+\frac{x+y}{n})^n}$, a z niej — dowodzona teza. ■

Lemat 15.25
Jeśli $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ i mianowniki b,d mają ten sam znak, to zachodzi nierówność $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Dowód. Mnożąc nierówność $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ przez liczbę $bd > 0$ otrzymujemy nierówność równoważną wyjściowej: $ad < bc$. Mnożąc nierówność $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ przez liczbę $b(b+d) > 0$ otrzymujemy: $a(b+d) < b(a+c)$, a po redukcji $ad < bc$, co kończy dowód lewej nierówności. Tak samo dowodzimy, że prawa jest prawdziwa. ■

Uwaga 15.26 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d}$, więc liczba $\frac{a+c}{b+d}$ jest *średnią ważoną* liczb $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ z wagami $\frac{b}{b+d}$ i $\frac{d}{b+d}$. Wagi to nieujemne liczby o sumie 1. W tym przypadku pojawiły się dwie, ale ogólnie może być ich więcej.

Niech $p_1 > 0, p_2 > 0, \ldots, p_n > 0$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ i $n \geqslant 2$. Czytelnik udowodni, że jeśli wśród liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są co najmniej dwie różne, to
$\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) < p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n < \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Oznacza to, że średnia ważona n liczb leży między najmniejszą i największą z nich. ■

Teraz zajmiemy się twierdzeniem, które dosyć rzadko jest formułowane w początkowej fazie nauki o ciągach.

Twierdzenie 15.27 (Stolza)
Załóżmy, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0, że jest on ściśle monotoniczny oraz że istnieje granica $g = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.
Jeśli spełniony jest jeden z warunków:
15.27.1 ciąg (b_n) ma granicę nieskończoną,
15.27.2 ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do 0,
to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ma granicę i zachodzi równość:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g\,.$$

Dowód. Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że ciąg (b_n) jest ściśle rosnący, bo można go zastąpić ciągiem $(-b_n)$. Niech m i M będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $m < g < M$; jeśli $g = -\infty$, to rozważamy tylko M, gdy $g = +\infty$ — tylko m. Dla dowodu tezy wystarczy wykazać, że dla dostatecznie dużych liczb naturalnych n zachodzi nierówność $m < \frac{a_n}{b_n} < M$.

Niech m' i M' będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$m < m' < g < M' < M\,.$$

Ponieważ granicą ciągu $\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right)$ jest g, więc istnieje taka liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ i dowolnej liczby naturalnej k zachodzą nierówności:

$$m' < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < M'$$
$$m' < \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}} < M'$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m' < \frac{a_{n+k}-a_{n+k-1}}{b_{n+k}-b_{n+k-1}} < M'$$

Ciąg (b_n) jest ściśle rosnący, więc $b_{j+1} - b_j > 0$ dla dowolnego numeru j. Z lematu 15.26 i pierwszych dwu nierówności wynika, że liczba $\frac{a_{n+2}-a_n}{b_{n+2}-b_n} = \frac{(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)}{(b_{n+2}-b_{n+1})+(b_{n+1}-b_n)}$ leży między liczbami $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ i $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}$, a ponieważ te leżą między liczbami m' i M', więc spełniona jest nierówność

$$m' < \frac{a_{n+2}-a_n}{b_{n+2}-b_n} < M'\,.$$

W ten sam sposób wynika nierówność

$$m' < \frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{b_{n+3}-b_{n+2}} < M'\,.$$

Z otrzymanych nierówności wynika następna:

$$m' < \frac{a_{n+3}-a_n}{b_{n+3}-b_n} < M'\,.$$

Prosta indukcja kończy dowód nierówności

$$m' < \frac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} < M'\,.$$

Skorzystawszy z założenia (**15.27.2**) i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy ciągu stwierdzamy, że dla każdego numeru n zachodzi równość

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} = \frac{-a_n}{-b_n} = \frac{a_n}{b_n}\,.$$

Z niej i z twierdzenia o szacowaniu wynika, że dla każdego $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$m < m' \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant M' < M\,,$$

a to oznacza, że zakończyliśmy dowód twierdzenia przy założeniu (**15.27.2**).

Skorzystamy teraz z założenia (**15.27.1**). Nierówność

$$m' < \frac{a_{n+k}-a_n}{b_{n+k}-b_n} < M'$$

możemy przepisać w postaci

$$m' < \frac{\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} - \frac{a_n}{b_{n+k}}}{1-\frac{b_n}{b_{n+k}}} < M' \; .$$

Ta nierówność jest równoważna następującej (przyp. $b_{n+k} > b_n$)

$$m'\big(1-\tfrac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \tfrac{a_n}{b_{n+k}} < \tfrac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M'\big(1-\tfrac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \tfrac{a_n}{b_{n+k}} \; .$$

Niech $n = n_0 + 1$. Ponieważ $\lim_{k\to\infty} m'\big(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \frac{a_n}{b_{n+k}} = m'$ i $m < m'$, więc istnieje taka liczba k_0 , że dla $k > k_0$ zachodzi nierówność $m'\big(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\big)+\frac{a_n}{b_{n+k}} > m$. Podobnie istnieje taka liczba k_1 , że dla $k > k_1$ mamy $M'\big(1-\frac{b_n}{b_{n+k}}\big) + \frac{a_n}{b_{n+k}} < M$. Wobec tego jeśli $k > \max(k_0, k_1)$, to zachodzi nierówność podwójna

$$m < \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} < M \; .$$

Ta obserwacja kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 15.25 Znajdziemy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^7+2^+\cdots+n^7}{n^8}$. Oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} n^8 = \infty$. Ciąg (n^8) jest ściśle rosnący. Można więc spróbować użyć twierdzenie Stolza. Niech $a_n = 1^7 + 2^+ \cdots + n^7$, $b_n = n^8$. Mamy $a_{n+1}-a_n = (n+1)^7$ i $b_{n+1}-b_n = (n+1)^8-n^8 =$ $=8n^7 + 28n^6 + 56n^5 + 70n^4 + 56n^3 + 28n^2 + 8n + 1$. Wobec tego mamy $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^7}{8n^7+28n^6+56n^5+70n^4+56n^3+28n^2+8n+1}$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^7}{8+\frac{28}{n}+\frac{56}{n^2}+\frac{70}{n^3}+\frac{56}{n^4}+\frac{28}{n^5}+\frac{8}{n^6}+\frac{1}{n^7}} \; .$$

Z tej równości i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy wynika natychmiast, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1}{8}$ i wobec tego z twierdzenia Stolza wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1^7+2^+\cdots+n^7}{n^8} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{8} \, . \qquad ■$$

W ostatnim przykładzie pokazaliśmy, jak można wykorzystać twierdzenie Stolza w typowy sposób. To ważne i skuteczne twierdzenie. Z jego siłą zapoznać się można stosując je w różnych zadaniach. Podamy jeszcze jeden przykład, w zasadzie bezsensowny.

Przykład 15.26 Na maturze rozszerzonej w 2005 r pojawiło się zadanie: znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\cdots+3n-2}{5+7+9+\cdots+2n+3}$. Można je rozwiązać stwierdzając, że $1+4+7+\cdots+3n-2 = \frac{n(3n-1)}{2}$ oraz $5+7+9+\cdots+2n+3 = n(n+4)$, a następnie stosując twierdzenie o arytmetycznych własnościach granicy ciągu. Wynik to $\frac{3}{2}$.

Jednak co najmniej jeden z maturzystów napisał coś takiego:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\cdots+3n-2}{5+7+9+\cdots+2n+3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-2/n}{2+3/n} = \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}$.
Symbol $\frac{\infty}{\infty}$ ludziom obeznanym z twierdzeniem Stolza i z regułą de l'Hospitala, o której będziemy jeszcze mówić, sugeruje, że autor ma na myśli jedno z tych twierdzeń, w tym przypadku może to być tylko twierdzenie Stolza. Niestety to tylko hipoteza i w rzeczywistości nie wiadomo, co uczeń miał na myśli, może napisał tę równość nie myśląc w ogóle o uzasadnieniu. Ułatwiłby pracę sprawdzającym, gdyby napisał coś w rodzaju: z twierdzenia Stolza wynika, że … Autor tej książeczki przypuszcza, że jednak rozwiązanie zostało uznane, chociaż równie dobrze można było uznać, że brak wyjaśnień uniemożliwia stwierdzenie, że zdający wiedział, jakim twierdzeniem (niezbyt popularnym w szkołach) się posłużył i uznać zadanie za nierozwiązane! Redagując rozwiązanie zadania lub problemu należy trochę myśleć o tych, którym przyjdzie tekst przeczytać i dać im szanse zrozumienia pamiętając o tym, że każdy myśli ,,po swojemu". ■

Twierdzenie 15.28 (o podciągach monotonicznych)
Z każdego ciągu liczbowego można wybrać podciąg monotoniczny.

Dowód. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Możliwe są dwa przypadki:
1° każdy podciąg ciągu (a_n) zawiera największy wyraz, tzn. taki wyraz a_{n_0}, że dla każdego k zachodzi nierówność $a_{n_k} \leqslant a_{n_0}$;
2° istnieje podciąg, który nie zawiera największego wyrazu.

Pokażemy, że w pierwszym przypadku można z ciągu wybrać podciąg nierosnący, a w drugim — ściśle rosnący.
Rozpatrujemy pierwszą możliwość. Niech n_1 będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której a_{n_1} jest największym

wyrazem ciągu (a_n). Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już liczby $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ i to tak, że jeśli $m > n_j$, to $a_m \leqslant a_{n_j}$ Niech $a_{n_{k+1}}$ będzie największym spośród wyrazów następującego podciągu ciągu (a_n): a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, a_{n_k+3}, ... Jasne jest, że $a_{n_{k+1}} \leqslant a_{n_k}$ oraz że $a_m \leqslant a_{n_{k+1}}$ dla $m \geqslant n_{k+1}$. Zdefiniowaliśmy więc podciąg nierosnący ciągu (a_n).

Kolej na drugi przypadek. Aby nie komplikować oznaczeń założymy, że w ciągu (a_n) nie ma największego wyrazu — z ciągu (a_n) można wybrać podciąg o tej własności i oznaczyć go przez (a_n). Niech $n_1 = 1$. a_{n_1} nie jest największym wyrazem ciągu (a_n), więc istnieje wyraz od niego większy. Niech n_2 będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność $a_{n_1} < a_{n_2}$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już w taki sposób numery $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, że zachodzą nierówności $a_{n_1} < a_{n_2} < \ldots < a_{n_k}$. a_{n_k} nie jest największym wyrazem ciągu a_{n_k}, a_{n_k+1}, $a_{n_k+2}, \ldots$, bo wtedy liczba $\max(a_1, a_2, \ldots, a_{n_k})$ byłaby największym wyrazem ciągu (a_n). Niech n_{k+1} będzie najmniejszą taką liczbą naturalną, dla której spełnione są obie nierówności $n_{k+1} > n_k$ i $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Jasne jest, że zdefiniowaliśmy indukcyjnie ściśle rosnący podciąg ciągu (a_n). ■

Czytelnik zauważy, że w tym rozumowaniu korzystaliśmy wyłącznie w własności nierówności, innych własności liczb rzeczywistych nie wykorzystaliśmy wcale. Można więc rozpatrywać zamiast ciągów liczb rzeczywistych ciągi elementów pewnego zbioru, które umiemy porównywać, przy czym nierówność jest przechodnia itd. Mogą to być np. ciągi zbiorów, jeśli przyjmiemy, że nierównością jest zawieranie: $A \subseteq B$ zamiast $a \leqslant b$ dla liczb rzeczywistych. Prawdziwe jest wobec tego stwierdzenie: z każdego ciągu zbiorów (A_n) można wybrać taki podciąg (A_{n_k}), że $A_{n_1} \subseteq A_{n_2} \subseteq A_{n_3} \subseteq x \ldots$ albo (A_{n_k}), że $A_{n_1} \supseteq A_{n_2} \supseteq A_{n_3} \supseteq \ldots$

Teraz udowodnimy bardzo ważne twierdzenie, z którego później przyjdzie nam wielokrotnie korzystać.

Twierdzenie 15.29 (Bolzano–Weiestrassa)
Z każdego ciągu liczb rzeczywistych można wybrać podciąg, który

ma granicę; z ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny do granicy skończonej.

Dowód. Z ciągu (a_n) wybieramy podciąg monotoniczny (poprzednie twierdzenie). Ma on granicę, co jest treścią twierdzenia o granicy ciągu monotonicznego. ■

Jak widać cała praca została wykonana wcześniej. Dodajmy, że na ogół podawany jest nieco inny dowód tego twierdzenia. Naszkicujemy go teraz w przypadku ciągu ograniczonego. Załóżmy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) leżą w przedziale $P = [-m, m]$. Co najmniej jedna z jego połówek (dalej oznaczona przez P_1), zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu, tj. istnieje nieskończenie wiele takich numerów n, że $a_n \in P_1$. Przyjmujemy $P_1 = [b_1, c_1]$. Niech $P_2 = [b_2, c_2]$ oznacza tę połówkę przedziału P_1, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Kontynuujemy definiowanie kolejnych połówek. W wyniku otrzymujemy ciąg przedziałów $P_1 = [b_1, c_1] \supseteq P_2 = [b_2, c_2] \supseteq P_3 = [b_3, c_3] \supseteq \dots$
Wynika stąd, że ciąg (b_n) jest niemalejący, a ciąg (c_n) — nierosnący. Mają więc one granice, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. W rzeczywistości granice te są równe, bo $c_n - b_n = \frac{m}{2^{n+1}}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{2^{n+1}} = 0$. Wybieramy teraz podciąg (a_{n_k}) tak, by $a_{n_j} \in P_j$ oraz $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Ten podciąg jest zbieżny na mocy twierdzenia o trzech ciągach: $b_k \leqslant a_{n_k} \leqslant c_k$.

W przypadku ciągu nieograniczonego teza jest oczywista.

Możemy teraz zająć się tak zwanym warunkiem Cauchy'ego.

Definicja 15.30 (ciągu Cauchy'ego)
(a_n) jest ciągiem Cauchy'ego (lub: spełnia warunek Cauchy'ego) wtedy i tylko wtedy, gdy
dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n_ε, że jeśli $m, k > n_\varepsilon$, to $|a_m - a_k| < \varepsilon$. ■

Mówiąc niedokładnie ciąg spełnia warunek Cauchy'ego jeśli odległości między wyrazami o dużych numerach są bardzo małe.

W istocie rzeczy dowód tego, że ciąg geometryczny o ilorazie $q \leqslant -1$ nie ma granicy skończonej polegał na wykazaniu, że nie spełnia on warunku Cauchy'ego.

Twierdzenie 15.31 (Cauchy'ego)
Ciąg jest zbieżny (czyli ma skończoną granicę) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Załóżmy najpierw, że ciąg ma skończoną granicę g. Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje taka liczba n_ε, że jeśli $k, m > n_\varepsilon$, to $|a_m - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Spełnione są wtedy nierówności $|a_m - a_k| = |a_m - g + g - a_k| \leqslant |a_m - g| + |g - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Istnieje wtedy n_1 takie, że dla $k, m > n_1$ mamy $|a_k - a_m| < 1$. Niech $m = n_1 + 1$. Wtedy $|a_k| - |a_m| \leqslant |a_k - a_m| < 1$, zatem $|a_k| \leqslant 1 + |a_m|$ dla wszystkich dostatecznie dużych k. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Wybierzmy z ciągu (a_n) podciąg zbieżny $\left(a_{n_j}\right)$. Niech g oznacza jego granicę. Wykażemy, że g jest granicą całego ciągu. Jeśli $\varepsilon > 0$, to dla dostatecznie dużych k, m zachodzą nierówności $|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ i $|a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ m, k, j są wybierane dowolnie, byle były dostatecznie duże, i $n_m \geqslant m$, więc można wybrać je tak, by $m = n_j$. Wtedy dla dostatecznie dużego k mamy

$$|a_k - g| \leqslant |a_k - a_m| + |a_m - g| = |a_k - a_m| + |a_{n_j} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

co oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

Uwaga 15.32 Czytelnik może nieco zdziwić się, bo z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że ciągi Cauchy'ego to ciągi zbieżne. Nadaliśmy więc tym ciągom dwie nazwy. Obie są używane, bo w nieco ogólniejszej sytuacji, gdy zamiast liczb rzeczywistych rozważana jest dowolna przestrzeń metryczna, równoważności na ogół nie ma — pojęcie ciągu Cauchy'ego jest nieco ogólniejsze niż pojęcie ciągu zbieżnego: zdarzają się przestrzenie metryczne, w których niektóre ciągi Cauchy'ego nie mają granicy. ■

Twierdzenie 15.33
Ciąg ma granicę wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg ma granicę.

Dowód. Jeśli ciąg ma granicę, to jest ona granicą wszystkich jego podciągów bez względu na to, czy jest skończona, czy nie. Drugie wynikanie jest jeszcze prostsze: ciąg jest swoim podciągiem. ■

Twierdzenie 15.34
Z ciągu, który nie ma granicy, można wybrać dwa podciągi, które mają różne granice.

Dowód. Niech g będzie granicą jednego z podciągów. Ponieważ $g \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, więc istnieje taka liczba $M > g$, że dla nieskończenie wielu numerów n zachodzi nierówność $a_n > M$ albo taka liczba $m < g$, że dla nieskończenie wielu numerów n spełniona jest nierówność $a_n < m$. W pierwszym przypadku możemy wybrać z ciągu (a_n) podciąg (a_{n_k}) o wyrazach większych niż M, który ma granicę g_1. Zachodzi więc nierówność $g_1 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \geqslant M > g$. W drugim przypadku możemy wybrać podciąg (a_{n_l}) o wyrazach mniejszych niż m, który ma granicę g_2, więc o $g_2 \leqslant m < g$. Dowód został zakończony. ■

Przykład 15.27 Niech $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$. Wykażemy, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Niech $m > k$. Wówczas $|a_m - a_k| = \left|\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \cdots + (-1)^{m-k+1} \cdot \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \cdots + (-1)^{m-k+1} \cdot \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{k+1}$ — wynika to od razu z nierówności: $-\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} < 0$, $-\frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+5} < 0$ itd. oraz nierówności $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} > 0$, $\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} > 0$, itd. Wynika stąd, że jeśli $k > \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$ i $m > k$, to $|a_m - a_k| < \varepsilon$, a to oznacza, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny. ■

Przykład 15.28 Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. Oczywiście dla każdego numeru n zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$, a to oznacza, że ciąg (A_n) jest ściśle rosnący. Jako ściśle monotoniczny ma granicę. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Gdyby tak nie było to ciąg spełniałby warunek Cauchy'ego. Dla $n > 1$ mamy jednak

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Wobec tego warunek Cauchy'ego spełniony nie jest, np. jeżeli $\varepsilon = \frac{1}{2}$, to nie można znaleźć takiej liczby n_ε, że jeśli $m, k > n_\varepsilon$, to $|a_m - a_k| < \frac{1}{2} = \varepsilon$. ■.

Przykład 15.29 Przyjmijmy, że dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość $a_n = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + (-1)^{\lceil\sqrt{n}\rceil} \frac{1}{n}$.

Wykażemy, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę. Mamy: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 > a_5 > \ldots > a_9 < a_{10} < \ldots < a_{16} > a_{17} > > a_{18} > \ldots > a_{25} < a_{26} < \ldots$ Wynika stąd, że aby wykazać, że ciąg (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego, wystarczy wykazać, że ciąg (a_{n^2}) spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $k > 1$ będzie liczbą naturalną. Mamy wtedy:

$$\frac{2}{k} = \frac{k-1}{k^2-k} + \frac{k}{k^2} < \underbrace{\frac{1}{(k-1)^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2-k}}_{k-1 \text{ składników}} + \underbrace{\frac{1}{k^2-k+1} + \cdots + \frac{1}{k^2}}_{k \text{ składników}} <$$

$$< \frac{k-1}{(k-1)^2+1} + \frac{k}{k^2-k+1} < \frac{k-1}{(k-1)^2} + \frac{k}{k^2-k} = \frac{2}{k-1}\,.$$

Niech $s_k = \frac{1}{(k-1)^2+1} + \cdots + \frac{1}{k^2-k} + \frac{1}{k^2-k+1} + \cdots + \frac{1}{k^2}$. Wiemy już, że $\frac{2}{k} < s_k < \frac{2}{k-1}$ dla każdej liczby naturalnej $k > 1$. Mamy więc

$$0 = \frac{2}{k} - \frac{2}{k} < s_k - s_{k+1} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}\,,$$

$$\frac{2}{k+2} = 0 + \frac{2}{k+2} < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+1} = \frac{2}{k-1}\,,$$

$$0 = \frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+2} < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} - s_{k+3} < \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+3}\,.$$

Te oszacowania można kontynuować (indukcja). W wyniku dla dowolnej liczby naturalnej ℓ otrzymujemy następujące nierówności:

$$0 < s_k - s_{k+1} + s_{k+2} - s_{k+3} + \cdots + (-1)^\ell s_{k+\ell} < \frac{2}{k-1}\,.$$

Zauważmy, że $a_{n^2} = -s_1 + s_2 - s_3 + \cdots + (-1)^n s_n$. Niech m i $n > m$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy

$a_{n^2} - a_{m^2} = s_{m+1} - s_{m+2} + s_{m+3} - s_{m+4} + \cdots + (-1)^{n-m+1} s_n$,

zatem $\quad |a_{n^2} - a_{m^2}| = s_{m+1} - s_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m+1} s_n < \frac{2}{m}$.

Załóżmy, że $\varepsilon > 0$ i $m > \frac{2}{\varepsilon}$. Wtedy spełniona jest nierówność $|a_{n^2} - a_{m^2}| < \varepsilon$, a to oznacza, że ciąg (a_{n^2}) spełnia warunek Cauchy'ego, zatem jest zbieżny. ■

Twierdzenie 15.35 (o ciągłości funkcji $\sqrt[k]{}$)

Jeśli $a_n \geqslant 0$ dla każdej liczby naturalnej n i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to dla każdej liczby naturalnej k zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$. Jeśli k jest liczbą nieparzystą, to teza jest prawdziwa bez założenia nieujemności wyrazów ciągu (a_n).

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy z ciągu $(\sqrt[k]{a_n})$ można wybrać podciąg (a_{n_m}), który ma granicę $a \neq \sqrt[k]{g} \geqslant 0$. Z twierdzenia o granicy iloczynu ciągów wynika, że wtedy $a^k = \big(\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[k]{a_{n_m}}\big)^k = \lim\limits_{m\to\infty} \big(\sqrt[k]{a_{n_m}}\big)^k = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m} = g$, co przeczy nierówności $a \neq \sqrt[k]{g}$. Jeśli $g < 0$ i k jest nieparzyste, to dowód przebiega identycznie. ■

Uwaga 15.36 (o przestrzeniach metrycznych)
W matematyce używa się często terminu *przestrzeń metryczna*. Chodzi o zbiór, w którym zdefiniowano odległość między punktami. Przestrzeniami metrycznymi są: prosta, płaszczyzna, zwykła przestrzeń trójwymiarowa, odcinek, trójkąt. Można też definiować odległość między funkcjami. Podamy ścisłe określenie.

Przestrzenią metryczną nazywamy taki zbiór X, którego każdym dwóm elementom $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ przypisana została liczba $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ w taki sposób, że

M1 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geqslant 0$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$;
M2 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
M3 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varrho(\mathbf{y},\mathbf{x})$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y} \in X$;
M4 $\varrho(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varrho(\mathbf{y},\mathbf{z}) \geqslant \varrho(\mathbf{x},\mathbf{z})$ dla dowolnych $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$.

W przestrzeni metrycznej można zdefiniować kule otwarte: jeśli $\mathbf{p} \in X$ oraz $r > 0$, to kulą otwartą o środku $\mathbf{p}$ i promieniu r nazywamy zbiór $B(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in X\colon \quad \varrho(\mathbf{p},\mathbf{x}) < r\}$.

Na płaszczyźnie można zdefiniować odległość np. za pomocą wzoru $\varrho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$, co odpowiada zwykłemu sposobowi mierzenia odległości między punktami płaszczyzny (twierdzenie Pitagorasa).

Teraz nie będziemy zajmować się przestrzeniami metrycznymi, ale pokażemy, jak można w zbiorze $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zdefiniować **sensowną** metrykę.

Niech $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ i dodatkowo $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = -1$. Funkcja f przekształca *domkniętą* prostą $\overline{\mathbb{R}}$ na odcinek $[-1,1]$. Jest ona różnowartościowa. Przyjmujemy $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y) = |f(x) - f(y)|$ dla dowolnych punktów $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$. Czytelnik zechce sprawdzić, że $\varrho_{\overline{\mathbb{R}}}$ jest metryką w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ oraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_{\overline{\mathbb{R}}}(a_n, g) = 0$ dla każdego ciągu liczbowego (a_n) niezależnie od tego, czy granica g jest skończona, czy nie. ■

Zadania

1. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jeśli ta granica istnieje, gdy $a_n =$

a. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n+13}$; **b.** $\frac{1+n+3n+n^2}{n^2-n+13}$;

c. $\frac{1+n+3n^7+n^2}{n^2-n^8+13}$; **d.** $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

e. $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$; **f.** $\sqrt{1+2^{(-1)^n}}$;

g. $\sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$, $k\in\mathbb{N}$; **h.** $\sqrt[n]{n}$;

i. $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; **j.** $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3-n+13}$;

k. $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$; **l.** $\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

m. $\frac{n}{2^n}$; **n.** $\frac{n^{13}}{2^n}$;

o. $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $|q|<1$; **p.** nq^n, $|q|<1$;

r. $1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}$, $|q|<1$.

2. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

3. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

4. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona równa 0.

5. Wykazać, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ istnieje i wyjaśnić, czy jest ona skończona.

6. Niech $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... Wykazać, ze ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

7. Wykazać, że

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$; **b.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right)^n=1$;

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$; **d.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^n=e^2$.

8. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$.

9. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=1$.

10. Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=k$, dla $k\in\mathbb{N}$, to zachodzi wzór:
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^n=e^k$.

11. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} > (1 + \frac{1}{k})^k$.

12. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $e - \big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big) < \frac{1}{n \cdot n!}$.

13. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że liczba e jest niewymierna.

14. Udowodnić, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

15. Wykazać, że jeśli ciąg (a_n) zawiera takie dwa podciągi $(a_{n'_k})$ i $(a_{n''_k})$ zbieżne do tej samej granicy g, że każdy wyraz ciągu (a_n) jest wyrazem co najmniej jednego z tych dwóch podciągów, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. [15.5]

16. Niech $a_1 > 0$ i $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Udowodnić, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę.

17. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ i $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$ dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

18. Niech $a_0 = 9$, $a_1 = 27$ i $a_{n+2} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}a_{n+1}$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) jest jest zbieżny. Jeśli ma granicę, znaleźć ją.

19. Niech c będzie liczbą dodatnią. Niech $a_1 = \sqrt{c}$ i niech $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Wykazać, że ciąg (a_n) ma skończoną granicę i znaleźć ją.

20. Wykazać, że jeśli $g > 0$ jest liczbą niewymierną, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = g$, to zachodzi równość $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

21. Załóżmy, że ciąg (a_n) nie jest ograniczony z góry, ani z dołu oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dowieść, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje taki ściśle rosnący ciąg (n_m), że $x = \lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}$, tzn: każda liczba rzeczywista jest granicą podciągu ciągu (a_n).

[15.5] Twierdzenie sformułowane w tym zadaniu autor tego tekstu lubi nazywać twierdzeniem o scalaniu.

22. Wyrazy ciągu a_n są nieujemne. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n spełniona jest nierówność $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$. Wykazać, że ciąg o wyrazie $\frac{a_n}{n}$ ma skończoną granicę.

23. Niech a i b będą liczbami dodatnimi. Niech $a_1 = b$ i niech $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$. Wykazać, że istnieją takie liczby dodatnie c i $q \in (0,1)$, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $\left|a_n - \sqrt{a}\right| < cq^{2^n}$. Wskazać konkretną parę liczb c, q w przypadku $a = 5$ i $b = 3$.
Można wywnioskować stąd, że ciąg a_n jest bardzo szybko zbieżny do liczby $\sqrt{a}$, np. że liczba dokładnych cyfr liczby $\sqrt{a}$ przy zastąpieniu a_n przez a_{n+1} co najmniej podwaja się (dla dostatecznie dużych n, przy czym w przypadku $a = 5$, $b = 3$ jest tak nieomal od samego początku).

24! Załóżmy, że funkcja f jest wielomianem. Udowodnić, że dla każdego przedziału domkniętego $[a,b] \subset \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $L > 0$, że jeśli $x, y \in [a,b]$, to $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$.

25! Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba $L > 0$, że nierówność $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ zachodzi dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to stopień wielomianu f nie jest większy niż 1.

26. Załóżmy, że funkcja f jest wielomianem n–tego stopnia o współczynnikach całkowitych oraz $f(a) = 0$ i $a \notin \mathbb{Q}$. Dowieść, że istnieje taka liczba $C > 0$, że dla każdej pary liczb $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność $\left|\frac{p}{q} - a\right| \geqslant \frac{C}{q^n}$.

27. Podać przykład liczby rzeczywistej, np. podając jej rozwinięcie dziesiętne, która nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach całkowitych.
Takie liczby nazywane są *przestępnymi* (termin angielski to: transcendental number). W roku 1844 Liouville korzystając z twierdzenia, którego dowód jest treścią poprzedniego zadania, wskazał po raz pierwszy liczby przestępne.

28. Dowieść, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = g$.
Podać przykład takiego ciągu (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

29. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$.

30. Dowieść, że jeśli zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ i wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to prawdziwy jest wzór $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}} = g$. Podać przykład takiego ciągu liczb dodatnich (b_n), który nie ma granicy, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots\frac{1}{b_n}}$.

31. Znaleźć kresy zbioru X zdefiniowanego za pomocą wzoru: $X = \left\{\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} + \frac{a}{d+a+b} \colon \quad a,b,c,d > 0\right\}$.

32. Niech $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$, oraz $b_1 = 2$ i $b_{n+1} = \frac{2b_n+1}{b_n+1}$. Udowodnić, że $\sup\{a_n \colon \quad n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n \colon \quad n \in \mathbb{N}\}$.

33. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + n\cdot 2^n}$.

34. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ znaleźć $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

35. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

36. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znaleźć $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor\right)$.

37. Udowodnić, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją takie całkowite liczby k, l, że $|kx + l| < \frac{1}{n}$.

38. Dla jakich liczb dodatnich x ciąg $\left(n(\sqrt[n]{x} - 1)\right)$ jest zbieżny?

39. Dowieść, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

40. Dowieść, że $\lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)n^k} = \frac{1}{2}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

41! Niech $a > 1$ będzie liczbą rzeczywistą, a ℓ – naturalną. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\ell}{a^n} = 0$.

42. Podać przykład takiego ciągu (a_n) o granicy $+\infty$, że równość $\lim_{n\to\infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$ jest spełniona dla każdego $k \in \mathbb{N}$.

43. Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Definiujemy $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ dla $n+1, 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i to do wspólnej granicy.

44. Dowieść, że każda liczba z przedziału $[0,1]$ jest granicą pewnego podciągu ciągu $\left(n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor\right)$.

45. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$.

46. Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

47. Dany jest taki ciąg (a_n), że z każdego jego podciągu (a_{n_m}) można wybrać podciąg, którego granicą jest g. Udowodnić, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

48. Niech a i a_1 będą liczbami dodatnimi. Zdefiniujmy ciąg (a_n) indukcyjnie: $a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + \frac{a}{a_n^2})$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ w zależności od a.

49. Niech x będzie liczbą dodatnią. W zależności od x znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \ldots \cdot (1+x^{2^n})$.

50. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$.

51! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ i obie granice są równe. Czy z istnienia granicy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$?

52! Dowieść, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, to istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i obie granice są równe.

53. Niech $(a_{1,n})$, $(a_{2,n})$, $(a_{3,n})$, $\ldots$ będą dowolnymi ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Udowodnić, że istnieje wtedy taki ściśle rosnący ciąg (n_m) liczb naturalnych, że wszystkie ciągi (a_{1,n_m}), (a_{2,n_m}), (a_{3,n_m}), $\ldots$ są zbieżne — jest ich nieskończenie wiele!

54. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że wśród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 istnieje trójkąt o największym obwodzie.

55. Dane są takie koła K_1, K_2, K_3, ..., że dla dowolnej liczby naturalnej n koła K_1, K_2, K_3, ..., K_n można tak umieścić w kwadracie Q, by ich wnętrza były parami rozłączne. Dowieść, że w kwadracie Q można tak umieścić wszystkie koła K_1, K_2, K_3, ..., by wnętrza każdej pary były rozłączne.

56! Zbiór $\mathcal{P}$ złożony z podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ nazywamy pokryciem zbioru $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt zbioru A jest punktem pewnego zbioru $P \in \mathcal{P}$. Dowieść, że z każdego pokrycia przedziału domkniętego $[a, b]$ przedziałami **otwartymi** można wybrać pokrycie skończone.

57. Rozstrzygnąć, czy w zadaniu poprzednim można rozważać pokrycie przedziału $[a, b]$ dowolnymi przedziałami zamiast pokrycia przedziałami otwartymi.

58. Dowieść, że jeśli $\mathcal{P}$ jest pokryciem zbioru $[a, b]$ przedziałami otwartymi, to istnieje taka liczba $\lambda > 0$, że jeśli $|x - y| < \lambda$ i $x, y \in [a, b]$, to istnieje taki przedział $P \in \mathcal{P}$, że $x, y \in P$.

59. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb dodatnich, który zawiera podciąg zbieżny do liczby 0. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele wskaźników n, dla których wyraz a_n jest mniejszy od wszystkich wyrazów, które go poprzedzają, tzn. istnieje nieskończenie wiele takich liczb k, że $a_k < a_j$ dla wszystkich numerów $j < k$.

60. Załóżmy, że wyrazy niemalejącego ciągu (a_n) są dodatnie. Wykazać, że zbiór złożony z granic wszystkich podciągów ciągu $\left(\dfrac{a_n}{n + a_n}\right)$ jest przedziałem domkniętym.

61. Niech (a_n) będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych. Definiujemy:

$$r_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

Wykazać, że ciąg (r_n) jest zbieżny oraz że $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \notin \mathbb{Q}$.

62! Dowieść, że jeśli ciąg liczb całkowitych ma skończoną granicę, to prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są równe.

63! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

64! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

65! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= -7$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

Definicja 15.37 (niektórych potęg)

Dla każdej liczby $a \geqslant 0$ i naturalnej n określamy $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Przyjmujemy, że $a^0 = 1$ dla $a \neq 0$ i $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. ■

66! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), że zachodzą równości $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

67! Podać przykład takich dwóch ciągów (a_n) i (b_n), zbieżnych do 0, że $\forall_n (a_n > 0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$

(a) $= 0$, (b) $= \sqrt{13}$, (c) $= \frac{1}{7}$,
(d) $= \infty$, (e) $= -\infty$, (f) nie istnieje.

68. Niech $f(x) = x(1-x)$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorami $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Udowodnić, że dla każdego $a \in [0,1]$ ciąg (a_n) ma granicę.

69. Niech $5 \leqslant a_0$ i $a_{n+1} = a_n^2 - 10a_n + 30$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Znaleźć granicę ciągu (a_n) w zależności od a_0.

70. Niech $a_{n+1} = a_n^3 - 6a_n^2 + 12a_n - 6$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Wyjaśnić, czy ciąg (a_n) ma granicę i znaleźć ją, jeśli istnieje. Wynik może zależeć od a_0.

71*. Niech $f(x) = 1 - |1 - 2x|$. Niech $a_1 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Dowieść, że istnieje taka liczba $a \in [0, 1]$, że dla każdej liczby $x \in [0, 1]$ istnieje podciąg ciągu (a_n), którego granicą jest liczba x.