PEWNIK DEDEKINDA
i jego najprostsze konsekwencje

W rozdziale ósmym stwierdziliśmy, że z podanych tam pewników nie wynika istnienie pierwiastków z liczb rzeczywistych. Uzupełnimy teraz listę pewników jeszcze jednym i wtedy będziemy w stanie wykazać istnienie pierwiastków oraz zasadę Archimedesa, z której korzystaliśmy i jeszcze wiele razy skorzystamy.

Przypomnijmy, że zbiór A jest ograniczony z góry liczbą M wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leqslant M$. Mówimy wtedy, że M jest ograniczeniem górnym zbioru A. Zmieniając kierunki nierówności w tej definicji otrzymujemy definicję zbioru ograniczonego z dołu i ograniczenia dolnego.

Definicja 13.1 (kresów)
Najmniejsze (największe) ograniczenie górne (dolne) zbioru A nazywamy jego kresem górnym (dolnym). Oznaczamy je symbolem $\sup A$ ($\inf A$).
Jeśli zbiór A nie jest ograniczony z góry (z dołu), to piszemy $\sup A = \infty$ ($\inf A = -\infty$).
Największy element zbioru A, jeśli taki istnieje, oznaczamy symbolem $\max A$, a najmniejszy — $\min A$. ■

Przykład 13.1 $\sup \mathbb{R} = +\infty$, $\inf \mathbb{R} = -\infty$,
$\inf \mathbb{N} = 1 = \min \mathbb{N}$, $\sup\{x \in \mathbb{R}\colon \ x < 0\} = 0$,
$\max\{x \in \mathbb{R}\colon \ x < 0\} = 0$ nie istnieje,
$\sup(a,b) = b$, $\inf(a,b) = a$, $\sup[a,b] = b$, $\max[a,b] = b$,
$\inf[a,b] = a$, $\min[a,b] = a$, $\min(a,b]$ — nie istnieje. ■

Aby wykazać, że liczba c jest kresem górnym zbioru A należy dowieść, że
1° jest ona ograniczeniem górnym tego zbioru,
2° jeśli M też jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $c \leqslant M$.

Udowodnimy teraz bardzo proste, ale i bardzo przydatne

Twierdzenie 13.2
Ograniczenie górne c niepustego zbioru A jest jego kresem górnym wtedy i tylko wtedy, gdy
1° dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $a \in A$ większa niż $c - \varepsilon$:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} \ a > c - \varepsilon .$$

Warunek 1° jest równoważny temu, że:
jeśli $b < c$, to w zbiorze A znajdzie się liczba $a \in A$ większa od b, symbolami $\forall_{b<c}\exists_{a\in A}\ a > b$.

Dowód. Niech $c = \sup A$ i $\varepsilon > 0$. Ponieważ $c - \varepsilon < \sup A$, więc $c - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wobec tego można znaleźć w zbiorze A liczbę $a > c - \varepsilon$.

Załóżmy teraz, że dla ograniczenia górnego zbioru A jest spełniony warunek 1°. Jeśli $c \neq \sup A$, to istnieje mniejsze ograniczenie górne zbioru A, np. d. Niech $\varepsilon = c - d$. Oczywiście $\varepsilon > 0$. Ponieważ d jest ograniczeniem górnym A, więc w A nie ma liczby większej niż $d = c - \varepsilon$, wbrew warunkowi 1°. ■

Pewnik ciągłości Dedekinda

Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór złożony z liczb rzeczywistych ma kres górny. ■

Dedekind ten pewnik formułował nieco inaczej.

Twierdzenie 13.3

Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór złożony z liczb rzeczywistych ma kres dolny.

Dowód. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym z dołu liczbą m. Wtedy zbiór $B = \{b \in \mathbb{R}\colon\ -b \in A\}$ jest ograniczony z góry liczbą $M = -m$. Wykażemy najpierw, że liczba $-\sup B$ jest kresem dolnym zbioru A.

Jeśli $a \in A$, to $-a \in B$, więc $-a \leqslant \sup B$. Wobec tego $a \geqslant -\sup B$, więc liczba $-\sup B$ jest dolnym zbioru A.

Jeśli m jest ograniczeniem dolnym zbioru A, to $-m$ jest ograniczeniem górnym B, więc $-m \geqslant \sup B$,tzn. $m \leqslant -\sup B$. ■

Kolej na twierdzenie, które zdaje się być oczywiste.

Twierdzenie 13.4 (zasada Archimedesa)

Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna $n > a$, czyli zbiór liczb naturalnych nie jest ograniczony z góry, a to zapisujemy symbolami tak: $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dowód. Załóżmy, że twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy zbiór A złożony z tych liczb rzeczywistych, które są większe od każdej liczby naturalnej, jest niepusty. Jest ograniczony z dołu liczbą 1 (a nawet dowolną liczbą naturalną). Ma więc kres dolny. Niech $c = \inf A$. Liczba $c - 1$ nie jest elementem zbioru A, więc istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ większa niż $c-1$. Wobec tego liczba naturalna $n+1$ jest większa niż $c=(c-1)+1$, zatem $c \notin A$. Ponieważ $n+1>c$ i $c=\inf A$, więc istnieje taka liczba $a \in A$, że $c<a<n+1$. To jednak jest niemożliwe, bo w zbiorze A są tylko liczby większe od wszystkich naturalnych. ■

Archimedes zauważył konieczność stosowania tego twierdzenia. W jego sformułowaniu był to pewnik:
jeśli na prostej dane są dwa odcinki A i B, to można A powtórzyć jako składnik tyle razy, że otrzymana suma będzie większa niż B: $\quad A+A+A+\cdots+A>B$.

Wniosek 13.5 $\inf\{\frac{1}{n}\colon \ n \in \mathbb{N}\}=0$, tzn. dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba naturalna n, że $\varepsilon>\frac{1}{n}$.

Dowód. $\varepsilon>\frac{1}{n} \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$ i korzystamy z zasady Archimedesa. ■

Twierdzenie 13.6 (o istnieniu pierwiastków rzeczywistych)
Jeśli $a \geqslant 0$ i $k \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $b \geqslant 0$ taka, że $a=b^k$. Jeśli $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą nieparzystą, a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista b taka, że $b^k=a$.

Dowód. Jeśli $a=0$, to oczywiście $b=0$.

Niech $a>0$ i $A=\{x \in \mathbb{R}\colon \ x^k \leqslant a\}$. $A \neq \emptyset$, bowiem $\frac{a}{1+a} \in A$, gdyż $0<\frac{a}{1+a}<1$, zatem $\left(\frac{a}{1+a}\right)^k \leqslant \frac{a}{1+a}<a$. Jeśli $x \in A$, to $x<1+a$, bo

jeśli $x \geqslant 1+a$, to $x^k \geqslant (1+a)^k \geqslant 1+ka \geqslant 1+a>a$.

Niech $b=\sup A$. Ponieważ $\frac{a}{1+a} \in A$, więc $b \geqslant \frac{a}{1+a}>0$. Udowodnimy, że $b^k=a$. Załóżmy, że tak nie jest. Musi więc być albo $b^k<a$ albo $b^k>a$.

Niech $b^k<a$, $0<\varepsilon<\frac{a-b^k}{k(b+1)^{k-1}}$ i $\varepsilon<1$. Wtedy

$$(b+\varepsilon)^k-b^k=\varepsilon\big[(b+\varepsilon)^{k-1}+(b+\varepsilon)^{k-2}b+\cdots+b^{k-1}\big]<$$
$$<\varepsilon k(b+1)^{k-1}<a-b^k.$$

Wobec tego $(b+\varepsilon)^k<a$, zatem $b+\varepsilon \in A$ wbrew temu, że $b+\varepsilon>b=\sup A$. Nierówność $b^k<a$ nie zachodzi.

Niech $b^k>a$, $0<\varepsilon<b$ i $\varepsilon<\frac{b^k-a}{kb^{k-1}}$. Wtedy

$$b^k - (b-\varepsilon)^k = \varepsilon\big[b^{k-1} + b^{k-2}(b-\varepsilon) + \dots + (b-\varepsilon)^{k-1}\big] <$$
$$< \varepsilon k b^{k-1} < b^k - a\,.$$

Stąd wniosek, że $a < (b-\varepsilon)^k$. Jeśli więc $x \geqslant b-\varepsilon > 0$, to $x^k \geqslant (b-\varepsilon)^k > a$, zatem $x \notin A$. Liczba $b-\varepsilon < b = \sup A$ jest wobec tego ograniczeniem górnym zbioru A mniejszym od jego kresu górnego. Wykluczyliśmy teraz nierówność $b^k > a$.

Wykluczyliśmy obie nierówności, więc musi zachodzić równość $b^k = a$ Jest tylko jedna taka liczba b bowiem z nierówności $0 \leqslant b_1 < b_2$ wynika, że $b_1^k < b_2^k$.

Jeśli $a < 0$ i k jest nieparzystą liczbą naturalną, to z udowodnionej już części twierdzenia wynika, że istnieje dokładnie jedno takie $c > 0$, że $c^k = -a$, czyli $a = (-c)^k$. Przyjmujemy $b = -c$, co kończy dowód istnienia liczby b. Jednoznaczność wynika z jednoznaczności dla liczby $-a > 0$ i tego, że potęga liczby dodatniej jest dodatnia, a ujemnej — ujemna, bo wykładnik jest nieparzysty. ■

Zadania

1! Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się co najmniej jedna liczba wymierna.

2! Udowodnić, że w każdym przedziale znajduje się co najmniej jedna liczba niewymierna.

3. Znaleźć kresy górny i dolny zbioru A, jeśli $A =:$

(a) $\{\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\colon \quad k,m,n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\big\{\frac{(m+n)^2}{2^{mn}}\colon \quad m,n \in \mathbb{N}\big\}$;

(c) $\big\{\frac{x}{x^2+1}\colon \quad x \in \mathbb{R}\big\}$;

(d) $\big\{\frac{1}{x^4+1}\colon \quad x \in \mathbb{R}\big\}$;

(e) $\big\{\frac{x^2+x+1}{3x^2+8}\colon \quad x \in \mathbb{R}\big\}$;

(f) $\big\{x^2 + (xy-1)^2\colon \quad x,y \in \mathbb{R}\big\}$.

4. Niech $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Udowodnić, że

(a) $f(x) > 0$ dla $x \geqslant 3$;

(b) $f(x) < 0$ dla $x \leqslant -1$;

(c) $|f(x) - f(y)| \leqslant 45|x-y|$ dla $x,y \in [-1,3]$;

(d) istnieją takie liczby rzeczywiste $a < 0 < b < 2 < c$, że

$f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

(e) Znaleźć maksymalne przedziały (półproste), na których funkcja f jest monotoniczna.

5. Udowodnić, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ są niepustymi zbiorami, to

(a) $\sup\{a + b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} = \sup A + \sup B$;

(b) $\inf\{a + b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A + \inf B$;

(c) $\sup\{a - b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} = \sup A - \inf B$;

(d) $\inf\{a - b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A - \sup B$;

(d) $\inf\{a - b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} = \inf A - \sup B$;

(e) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(f) $\sup\{a \cdot b\colon \quad a \in A,\ b \in B\} =$

$= \max(\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B)$.

6. Znaleźć $\sup\left\{x \cdot y\colon \quad x + y = 4,\ x \in [0, 4],\ y \in [0, 4]\right\}$.

7. Znaleźć $\sup\left\{xyz\colon \quad x + y + z = 6,\ x, y, z \in [0, 6]\right\}$.