NAJPROSTSZE UKŁADY RÓWNAŃ

Najprostszy układ równań to układ dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie a_1,a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 są liczbami rzeczywistymi. Chodzi o znalezienie takiej pary liczb rzeczywistych x, y, dla równości (1) są spełnione jednocześnie. Tych par może być wiele.

Załóżmy od razu, że co najmniej jedna z liczb a_1, a_2, b_1, b_2, np. b_1 jest różna od 0.

Spróbujemy ten układ równań rozwiązać. Mnożąc pierwsze równanie przez b_2, a drugie — przez b_1, a potem odejmując je stronami, otrzymujemy $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$. Z pierwszego równania możemy wyznaczyć $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$. Wykazaliśmy, że jeśli jakaś para liczb spełnia układ (1), to spełnia też układ

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x &= c_1b_2 - c_2b_1, \\ y &= -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}. \end{cases} \tag{1'}$$

W taki sam sposób wykazujemy, że każda para, która spełnia układ $(1')$, spełnia też układ (1). Te układy są **równoważne**.

Jeśli $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, to para $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ jest jedynym rozwiązaniem układu (1). W tym przypadku mówimy, że układ jest **oznaczony** (ma skończenie wiele rozwiązań).

Jeśli $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, to aby układ miał $(1')$ rozwiązanie, musi być spełniony warunek $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$. Wtedy każda liczba $x \in \mathbb{R}$ spełnia pierwsze równanie układu $(1')$. Wobec tego dla każdego $x \in \mathbb{R}$ para $(x, -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1})$ jest rozwiązaniem układu $(1')$. W tym przypadku mówimy, że układ jest **nieoznaczony** (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

Jeśli układ nie ma rozwiązań, to mówimy, że jest **sprzeczny**.

Uwaga 13.1 Jeśli $b_1 \neq 0$ i $a_1b_2 - a_2b_1 = 0 = c_1b_2 - c_2b_1$, to $0 = c_1(a_1b_2 - a_2b_1) - a_1(c_1b_2 - c_2b_1) = b_1(a_1c_2 - a_2c_1)$, więc również $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. ∎

Otrzymane rezultaty mają interpretację geometryczną. Jeśli $b_1 \neq 0$, to równanie $a_1x + b_1y = c_1$ opisuje prostą L_1. Drugie równanie przedstawia płaszczyznę (gdy $a_2 = b_2 = c_2 = 0$), prostą L_2 (gdy co najmniej jedna z liczb a_2, b_2 jest różna od 0) lub zbiór pusty (gdy $a_2 = b_2 = 0 \neq c_2$). Gdy drugie równanie opisuje płaszczyznę, to zbiór rozwiązań układu jest prostą opisaną przez pierwsze równanie.

Załóżmy, że drugie równanie opisuje prostą. Jeśli prosta L_2 nie jest ona równoległa do prostej L_1, to rozwiązaniem układu jest punkt wspólny L_1 i L_2. Jeśli prosta L_2 jest równoległa do L_1 i $L_1 \neq L_2$, to układ nie ma rozwiązań. Jeśli $L_1 = L_2$, to zbiorem rozwiązań układu jest L_1.

Wreszcie, gdy $L_2 = \emptyset$, to cały układ rozwiązań nie ma.

Zanim opowiemy coś o bardziej skomplikowanych układach równań, wprowadzimy przydatne definicje. Rozpatrujemy funkcje $f_i \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}^k$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a $\mathbb{R}^k$ jest zbiorem złożonym z k–tek z liczb rzeczywistych, tzn. elementami $\mathbb{R}^1$ są liczby rzeczywiste, elementami $\mathbb{R}^2$ — pary liczb rzeczywistych, elementami $\mathbb{R}^3$ — trójki liczb rzeczywistych itd. Zbiór $\mathbb{R}^k$ nazywamy k–wymiarową przestrzenią rzeczywistą, a jego elementy punktami.

Rozwiązaniem układu n równań z k niewiadomymi

$$(2) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0 \end{cases}$$

nazywamy **zbiór** takich punktów $p = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, że $f_1(p) = 0$, $f_2(p) = 0$, ... , $f_n(p) = 0$. Będziemy też mówić, że k–tka spełnia układ równań. Podobnie można zdefiniować rozwiązanie układu nierówności. Czasem rozwiązaniem układu nazywane są te punkty p przestrzeni $\mathbb{R}^k$, dla których zachodzą równości $f_1(p) = 0$, $f_2(p) = 0$, ... , $f_n(p) = 0$. Są, jak widać, dwie terminologie trochę różniące się, jednak odrobina uwagi przy ich stosowaniu zabezpiecza nas przed nieporozumieniem.

Niech $n \leqslant m$ będą liczbami całkowitymi, $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ — liczbami rzeczywistymi. Definiujemy nowy symbol

$$\sum_{j=n}^{m} a_j := a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m .$$

Podobnie $\prod_{j=n}^{m} := a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_m$.

Przykład 13.1 Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_i a_j\Big) = \sum_{i=0}^{n} a_i\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)^2 .$$

Pokazaliśmy za pomocą nowego symbolu, że suma wszystkich iloczynów postaci $a_i a_j$ to kwadrat sumy liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$. ■

Przykład 13.2 Funkcja $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ to wielomian, jeśli $a_n \neq 0$, to wielomian n–tego stopnia o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$. ■

Uwaga 13.2
Jeśli $a_{i,j}$ są liczbami rzeczywistymi dla $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$, to zamiast pisać $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\Big)$ piszemy często $\displaystyle\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j}$. ■

Definicja 13.3 (wielomianu wielu zmiennych)
Funkcję $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wielomianem zmiennych x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_k$, jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste $a_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$, gdzie $0 \leqslant j_1 \leqslant n$, $0 \leqslant j_2 \leqslant n, \ldots,$ $0 \leqslant j_k \leqslant n$, że dla każdego punktu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$(3) \qquad f(\mathbf{x}) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} .$$

Stopniem wielomianu f zmiennych x_1, x_2, ... , x_k nazywamy liczbę $\max\{j_1 + j_2 + \cdots + j_k\colon \quad a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \neq 0\}$. ■

Twierdzenie 13.4 (o jednoznaczności współczynników)
Jeśli dla każdego $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} a_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} =$$
$$= \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{n} b_{j_1,j_2,\ldots,j_k} \cdot x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} = g(\mathbf{x}),$$

to dla każdego $(j_1,j_2,\ldots,l_k)$ zachodzi równość

$$a_{j_1,j_2,\ldots,j_k}=b_{j_1,j_2,\ldots,j_k}\,.^{13.1}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem k. Dla $k=1$ twierdzenie jest prawdziwe, co udowodniliśmy w poprzednim rozdziale. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów $k-1$ zmiennych. Lewą stronę można zapisać w postaci

$$\sum_{j=0}^{n} f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})x_k^j\,,\quad \text{gdzie}$$

$$f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_{k-1}=0}^{n} a_{j_1,j_2,\ldots,j_{k-1},j}\cdot x_1^{j_1}\cdot x_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot x_{k-1}^{j_{k-1}}.$$

Analogicznie można postąpić z prawą stroną otrzymując sumę

$$\sum_{j=0}^{n} g_j(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})x_k^j\,.$$

Dla każdego $(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}$ mamy więc dwa wielomiany **jednej** zmiennej x_k, których wartości są równe we wszystkich punktach prostej. Wobec tego odpowiednie współczynniki są równe, czyli $f_j(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})=g_j(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})$ dla każdego $(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}$. Z założenia indukcyjnego wynika, że odpowiednie współczynniki wielomianów f_j i g_j są równe, a to oznacza, że odpowiednie współczynniki wielomianów f i g są równe. Dowód został zakończony. ∎

Stopniem wielomianu $x^2+y^3+x^3y$ zmiennych x,y jest liczba 4. Podobnie jak w przypadku wielomianów jednej zmiennej przyjmujemy, że stopniem wielomianu zerowego jest $-\infty$. Można też udowodnić twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki nierozkładalne, ale jest ono nieco trudniejsze niż dla jednej zmiennej, bo nie działa algorytm Euklidesa. Wielomian zmiennych $x_1,x_2,\ldots,x_k$ można potraktować jako wielomian zmiennej x_k, którego współczynnikami są wielomiany pozostałych zmiennych.

W omówionym przykładzie mieliśmy $k=n=2$, $X=\mathbb{R}^2$, $f_1(x,y)=a_1x+b_1y-c_1$ i $f_2(x,y)=a_2x+b_2y-c_2$. Funkcje f_1

[13.1] Po obu stronach równości występują te same indeksy, ale to nie zmniejsza ogólności twierdzenia, bo wiele współczynników może być zerami — nie zakładamy np., że stopień którejkolwiek strony jest równy n, zawsze można dopisać odpowiednią liczbę zer i f_2 były wielomianami stopnia $\leqslant 1$ zmiennych x, y. W dyskusji układu (1) założyliśmy od razu, że stopień wielomianu f_1 jest równy 1 ($b_1 \neq 0$).

Rozwiązywanie układów równań jest na ogół trudnym problemem i niestety nie ma ogólnych metod ich rozwiązywania. Czasem problem można uprościć.

Przykład 13.3 Rozwiążemy układ $\begin{cases} x^2+y^2 &= 13, \\ xy &= 6. \end{cases}$

Ten układ można uprościć przyjmując $u = x+y$ i $v = xy$. Wtedy $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$. Układ przybiera postać
$\begin{cases} u^2 - 2v &=13, \\ v &=6. \end{cases}$

Stąd od razu mamy $v = 6$ i $u^2 = 25$, więc $v = 6$ i $u = 5$ lub $v = 6$ i $u = -5$. Pierwotny układ jest równoważny temu, że

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x+y=-5, \\ xy=6. \end{cases}$$

Jego rozwiązaniami są cztery pary liczb: $x = 2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = 2$; $x = -2$, $y = -3$ i $x = -3$, $y = -2$. ∎

Przypomnijmy, że jeśli $x+y = b$ i $xy = c$, to liczby x i y są pierwiastkami równania $t^2 - bt + c = 0$.

Można zapytać, w jakich przypadkach można stosować podstawienie $u = x+y$, $v = xy$. Odpowiedź na to pytanie jest prosta, ale musimy poprzedzić ją definicją.

Definicja 13.5 (funkcji symetrycznej)
Funkcja $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej permutacji $\sigma\colon \{1,2,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ i każdego $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ zachodzi równość

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}). \ \blacksquare$$

Wielomiany x^2+y^2, xy, $x^4 - x^2y^3 - x^3y^2 + y^4$ są symetryczne. Wielomiany x^2-y^2, $x+2y$, $x^3+x^2y+y^3$ nie są symetryczne.

Twierdzenie 13.6 (o wielomianach symetrycznych)
Jeśli jest wielomianem symetrycznym zmiennych x i y, to istnieje taki wielomian $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że równość $g(x+y, xy) = f(x,y)$ ma miejsce dla dowolnego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie przez indukcję względem stopnia wielomianu f. Jeśli stopień jest równy 1, to $f(x,y) = ax + by + c$. Ponieważ $a + c = f(1,0) = f(0,1) = b + c$, więc $a = b$. Wobec tego $f(x,y) = a(x+y)+c$, więc wystarczy przyjąć $g(u,v) = u + c$, by przekonać się, że twierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia pierwszego.

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielomianów stopnia nie większego niż k i że f jest wielomianem stopnia $k+1$. Z twierdzenia o jednoznaczności współczynników wynika, że jeśli w zapisie wielomianu f występuje składnik ax^ry^s, to występuje też składnik ax^sy^r. Wystarczy więc tezę indukcyjną wykazać jedynie dla wielomianów postaci $ax^ry^s + ax^sy^r$. Jeśli $0 < r < s$, to $ax^ry^s + ax^sy^r = a(xy)^r(y^{s-r} + x^{s-r})$, zatem wystarczy w żądanej postaci przedstawić wielomian $y^{s-r} + x^{s-r}$, co jest możliwe dzięki założeniu indukcyjnemu. Pozostaje jedynie rozpatrzeć, że wielomian $x^{k+1} + y^{k+1}$. Mamy teraz

$$x^{k+1} + y^{k+1} = x^{k+1} + x^ky + xy^k + y^{k+1} - xy(x^{k-1} + y^{k-1}) = (x+y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1}),$$

a ten wielomian można przedstawić w żądanej postaci na mocy założenia indukcyjnego. ■

Twierdzenie to pozostaje w mocy dla wielomianów symetrycznych dowolnej liczby zmiennych, ale wtedy trzeba zamiast $u = x + y$ i $v = xy$ mówić o zmiennych:

$$u_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k,$$
$$u_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_k + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{k-1}x_k$$
$$u_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{k-2}x_{k-1}x_k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k,$$

zwanych **elementarnymi wielomianami symetrycznymi**.

Czytelnik zauważy, że

$$(t + x_1)(t + x_2)\ldots(t + x_k) = u_k + tu_{k-1} + \cdots + t^{k-1}u_1 + t^k.$$

Zadania

Rozwiązać układ równań

1. $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -11, \\ (x^2 - y^2)xy = 180. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - yz = 3, \\ y^2 - zx = 4, \\ z^2 - xy = 5. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 37, \\ x^2 + z^2 + xz = 28, \\ y^2 + z^2 + yz = 19. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ xy + yz + zx = 26, \\ xyz = 24. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ xy = 27. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x^5 - y^5 = 992, \\ x - y = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = uv, \\ u^2 + v^2 = xy. \end{cases}$

11. Rozwiązać w liczbach naturalnych układ $\begin{cases} x + y = uv, \\ u + v = xy. \end{cases}$

12. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{2a}{1+a^2}, \\ \frac{x-y}{1-xy} = \frac{2b}{1+b^2}, \end{cases}$ gdzie a, b są danymi liczbami rzeczywistymi.

13. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x_1(x_6 + x_2) = x_3 + x_5, \\ x_2(x_1 + x_3) = x_4 + x_6, \\ x_3(x_2 + x_4) = x_5 + x_1, \\ x_4(x_3 + x_5) = x_6 + x_2, \\ x_5(x_4 + x_6) = x_1 + x_3, \\ x_6(x_5 + x_1) = x_2 + x_4. \end{cases}$

14. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x_1x_2 = 1, \\ x_2x_3 = 2, \\ x_3x_4 = 3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}x_n = n - 1, \\ x_nx_1 = n. \end{cases}$

15. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ układ $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + zx = 1, \\ xyz = a \end{cases}$ ma rozwiązania rzeczywiste?

16. Dowieść, że jeśli $a^2+c^2=1=b^2+d^2$ i $ab+cd=0$, to $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ i $ac+bd=0$.

17. Dowieść, że jeśli $a^2+c^2=1=b^2+d^2$ i $ab+cd=-\frac{1}{2}$, to $a^2+ab+b^2=c^2+cd+d^2$.

18. Dowieść, że jeśli $\begin{cases} a^2+k^2+p^2=1, \\ b^2+m^2+q^2=1, \\ c^2+n^2+r^2=1, \end{cases}$ i $\begin{cases} ab+km+pq=0, \\ bc+mn+qr=0, \\ ca+nk+rp=0, \end{cases}$

to $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1, \\ k^2+m^2+n^2=1, \\ p^2+q^2+r^2=1, \end{cases}$ i $\begin{cases} ak+bm+cn=0, \\ kp+mq+nr=0, \\ pa+qb+rc=0. \end{cases}$