WIELOMIANY KWADRATOWE

Zajmiemy się teraz wielomianami stopnia drugiego, zwanymi kwadratowymi. Symbol w będzie w tym rozdziale oznaczać wielomian kwadratowy, tj.

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

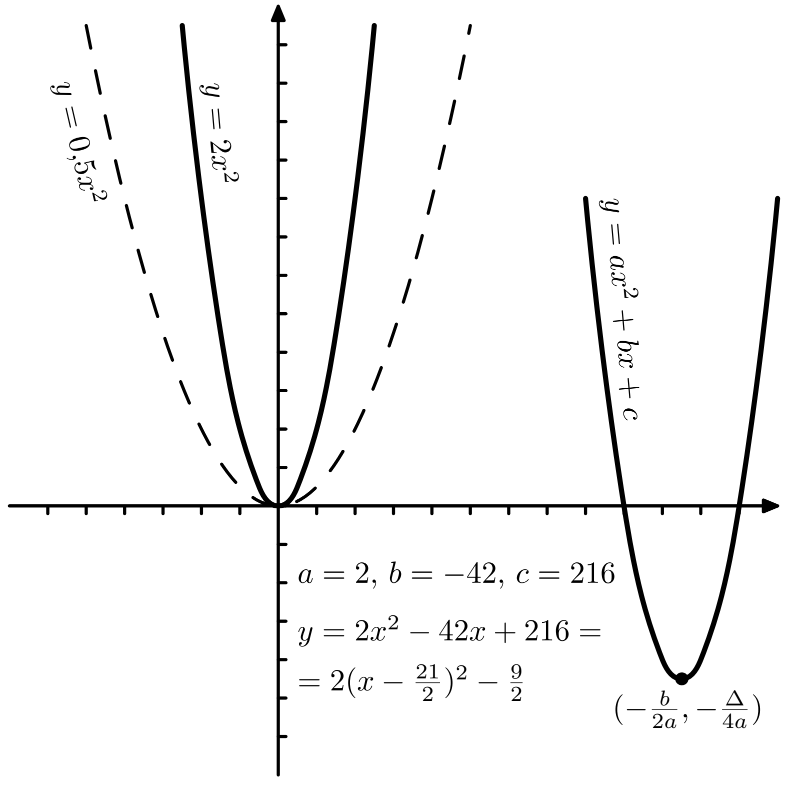
dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przy czym a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, $a \neq 0$. Możemy napisać

$$ax^2 + bx + c = a\big(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\big) =$$

$$= a\big(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x + \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 + \tfrac{c}{a}\big) = a\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{\Delta}{4a},$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Ta postać wielomianu drugiego stopnia zwana jest **kanoniczną**, a wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ — **wyróżnikiem** tego wielomianu.



Można łatwo stwierdzić, że wykresy wielomianów $ax^2 + bx + c$ i ax^2 są przystające. Zachodzi następujące

Twierdzenie 11.1
Wykres wielomianu $ax^2 + bx + c$ otrzymujemy przesuwając wykres wielomianu ax^2 o $-\frac{\Delta}{4a}$ jednostek wzdłuż osi pionowej i o $-\frac{b}{2a}$ jednostek wzdłuż osi poziomej. ■

Definicja 11.2 (paraboli)
Figurę przystającą do wykresu funkcji ax^2, $a \neq 0$ nazywamy **parabolą**. ■

Wniosek 11.3
Parabola $y = ax^2 + bx + c$ jest symetryczna względem prostej $x = -\frac{b}{2a}$.

Dowód. Niech $x_1 = -\frac{b}{2a} - t$, $x_2 = -\frac{b}{2a} + t$. Wtedy $y_1 = a(-t)^2 - \frac{\Delta}{4a} = at^2 - \frac{\Delta}{4a} = y_2$, więc punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są symetryczne względem prostej $x = -\frac{b}{2a}$ i leżą na paraboli $y = ax^2 + bx + c$. ■

Niektóre własności parabol są opisane w zadaniach kończących ten rozdział. Należy je rozwiązać.

Twierdzenie 11.4 (o wielomianie kwadratowym)
Jeśli $a > 0$ i $w(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, to funkcja w jest nieograniczona z góry, natomiast jest ograniczona z dołu liczbą $w\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, tzn. liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest najmniejszą wartością funkcji w. Jeśli $a < 0$, to funkcja w jest nieograniczona z dołu, natomiast jest ograniczona z góry liczbą $w\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$, tzn. liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest największą wartością funkcji w.

Dowód. Załóżmy, że $a > 0$. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $ax^2 + bx + c \leqslant M$. Wykażemy, że jeżeli $x_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\left|\frac{\Delta}{4a}\right| + |M| + 1\right) - \frac{b}{2a}$, to $w(x_0) > M$. Mamy $w(x_0) = \left(|M| + \left|\frac{\Delta}{4a}\right| + 1\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant |M| + \left|\frac{\Delta}{4a}\right| + 1 - \frac{\Delta}{4a} \geqslant |M| + 1 > M$ wbrew temu, że liczba M jest ograniczeniem górnym funkcji w. Wynika stąd, że funkcja w nie jest ograniczona z góry.

Ponieważ $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, więc $w(x) \geqslant -\frac{\Delta}{4a} = w\left(-\frac{b}{2a}\right)$, zatem liczba $-\frac{\Delta}{4a}$ jest najmniejszą wartością funkcji w.

W taki sam sposób można rozpatrzeć przypadek $a < 0$. ■

Następne stwierdzenie wynika bezpośrednio z tego, że nierówność $0 \leqslant x_1 < x_2$ pociąga za sobą nierówność $x_1^2 < x_2^2$:

Twierdzenie 11.5 (o monotoniczności funkcji kwadratowej)
Funkcja $ax^2 + bx + c$ jest ściśle monotoniczna na każdej z półpros-

tych $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. Jeżeli $a > 0$, to na półprostej $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ jest ściśle malejąca, a na półprostej $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$ — ściśle rosnąca. Jeśli $a < 0$ — odwrotnie. ■

Teraz zajmiemy się równaniem $ax^2 + bx + c = 0$. Można je przepisać w formie $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$. Wynika stąd od razu

Twierdzenie 11.6 (o pierwiastkach wielomianu kwadratowego)
Jeśli $\Delta < 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Jeśli $\Delta = 0$, to jedynym pierwiastekiem równania $ax^2 + bx + c = 0$ jest liczba $-\frac{b}{2a}$. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dokładnie dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{i} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}. \ ■$$

W dalszym ciągu, gdy $\Delta \geqslant 0$, będziemy pisać $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ pamiętając, że jeśli $\Delta = 0$, to $x_1 = x_2$.

Wyjaśnimy teraz, kiedy można wielomian ax^2+bx+c przedstawić w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia pierwszego. Ponieważ pierwiastek każdego czynnika jest też pierwiastkiem iloczynu wielomianów, więc jeśli $\Delta < 0$, to wielomianu $ax^2 + bx + c$ nie można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów pierwszego stopnia. Załóżmy, że $\Delta \geqslant 0$. Możemy napisać równości:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{oraz} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Te wzory nazywane są wzorami Viète'a. Mamy więc
$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c$.
Udowodniliśmy zatem

Twierdzenie 11.7 (o postaci iloczynowej i wzorach Viète'a)
Jeśli wyróżnik wielomianu $ax^2 + bx + c$ jest liczbą nieujemną, to dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi wzór:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$.
Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. ■

Z twierdzenia tego wynika łatwo, że w przedziale, którego końcami są liczby x_1 i x_2 wartości funkcji ax^2+bx+c mają znak przeciwny do znaku liczby a, zaś poza przedziałem domkniętym o końcach x_1, x_2 — taki sam jak liczba a.

Na tym kończymy przegląd podstawowych własności wielomianów kwadratowych.

Zadania

1. Naszkicować wykres funkcji $x^2-7x+12$. Rozwiązać nierówności $x^2-7x+12<0$ i $x^2-7x+12>0$.

2. Znaleźć liczby b i c wiedząc, że każda z nich jest pierwiastkiem równania $x^2+bx+c=0$.

3. Dla jakich liczb rzeczywistych m suma pierwiastków równania $x^2-mx+m(m+3)=0$ jest mniejsza o 3 od ich iloczynu?

4. Dla jakich liczb całkowitych k oba pierwiastki równania $kx^2-(1-2k)x+k-2=0$ są wymierne?

5. Dla jakich liczb rzeczywistych m jeden z pierwiastków równania $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ jest dwa razy większy od drugiego?

6. Dla jakiego $m\in\mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiatków równania $x^2+(m-2)x-(m-3)=0$ ma najmniejszą wartość?

7. Dowieść, że jeśli równania $x^2+mx+n=0$ i $x^2+px+q=0$ mają wspólny pierwiastek, to $(n-q)^2-(m-p)(np-mq)=0$.

8. Dowieść, że równanie $(x-a)(x-c)+2(x-b)(x-d)=0$, w którym $a<b<c<d$, ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

9. Dowieść, że jeśli $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, to

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

10. Rozwiązać równanie $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$.

11! Udowodnić, że jeśli równość $ax^2+bx+c=Ax^2+Bx+C$ zachodzi dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$, to $a=A$, $b=B$ i $c=C$.

12! Dowieść, że prosta może mieć z parabolą 0, 1 lub 2 punkty wspólne i nie może mieć ich więcej.

13. Napisać wzór funkcji, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $y=x^2-4$ względem:

a) osi x, b) osi y, c) punktu $(0,0)$, d) prostej $y=-2$.

14. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = |x^2 - 4x + 3|$, b) $y = x^3 + |-5x + 6|$,
c) $y = |x| + |1 - x^2|$, d) $y = 2x^2 + |x| - 1$,
e) $y = |x^2 - x| + 1 - x$, f) $y = |x^2| + |x|$,
g) $y = |x^2 - 4| - 4$, h) $y = -|x^2 - 2|$,
i) $y = |x^2 + 1| + |x|$.

15. Siatką drucianą o długości 60 m należy ogrodzić prostokątny plac przylegający jednym bokiem do muru. Jakie wymiary winien mieć plac, aby jego pole było największe?

16. Prostokąt ma boki długości a cm i b cm. Bok a powiększamy o x cm, zaś bok b zmniejszamy o x cm. Dla jakiej wartości x pole nowego prostokąta będzie największe?

17. Przekrój osiowy walca ma obwód 20 cm. Jak dobrać wymiary walca, aby pole jego powierzchni bocznej było największe?

18. Przekrój osiowy stożka ma obwód 30 cm. Czy można dobrać tak wymiary stożka, aby pole jego powierzchni było największe?

19. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze trójkątem równobocznym. Obwód okna wynosi p. Jaka powinna być podstawa prostokąta, aby powierzchnia okna była największa?

20. Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, aby przy obwodzie okna wynoszącym 2 m powierzchnia okna była największa?

21. Rozłożyć (w pamięci) na czynniki liniowe podane trójmiany:

a) $y = x^2 - 2x - 24$, b) $y = x^2 - 2x - 15$,
c) $y = x^2 - 13x - 48$, d) $y = 12x^2 - 20x + 3$,
e) $y = x^2 - mx - 2m^2$, f) $y = x^2 + (4m - n)x - 4mn$,
g) $y = x^2 - (2m - 3n)x - 6mn$.

22. Znaleźć równanie kwadratowe o całkowitych współczynnikach, którego pierwiastkiem jest liczba $4 - \sqrt{3}$.

23. Nie rozwiązując równania $x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + \frac{21}{16} = 0$ znaleźć sumę i różnicę sześcianów jego pierwiastków.

24. Nie rozwiązując równania $3x^2 + 17x - 14 = 0$ znaleźć wartość ułamka $\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$, gdzie x_1, x_2 oznaczają pierwiastki danego równania.

25. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ jeden z pierwiastków równania $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ jest kwadratem drugiego?

26. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ rzeczywiste pierwiastki równania $x^4 - (3k+2)x^2 + k^2 = 0$ tworzą ciąg arytmetyczny? Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą ciąg arytmetyczny, jeżeli $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$.

27. Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na paraboli o równaniu $y = 2x^2 - 13x + 7$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?

28. Wykazać, że jeśli suma odległości punktu (x, y) od punktów $(0, \sqrt{5})$ i $(0, -\sqrt{5})$ jest równa 6, to $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Czy z tego, że $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ wynika, że suma odległości punktu (x, y) od punktów $F_1 = (0, \sqrt{5})$ i $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ jest równa 6?

Definicja 11.8 (elipsy) Elipsą o ogniskach $F_1 \neq F_2$ nazywamy zbiór złożony ze wszystkich punktów P płaszczyzny, których suma odległości od punktów F_1 i F_2 jest równa d, gdzie d jest ustaloną liczbą większą od odległości ognisk F_1 i F_2. ■

29. Wykazać, że jeśli $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, to stosunek odległości punktu (x, y) od punktu $F_1 = (0, \sqrt{5})$ do odległości punktu (x, y) od prostej $y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

30. Wykazać, że jeśli $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, to stosunek odległości punktu (x, y) od punktu $F_1 = (0, \sqrt{13})$ do odległości punktu (x, y) od prostej $y = \frac{9}{\sqrt{13}}$ jest równy $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

31. Wykazać, że $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy wartość bezwzględna różnicy odległości punktu (x, y) od punktów $F_1 = (0, \sqrt{13})$ i $F_2 = (0, -\sqrt{13})$ jest równa $2\sqrt{13}$.

Definicja 11.9 (hiperboli) Hiperbolą o ogniskach $F_1 \neq F_2$ nazywamy zbiór złożony ze wszystkich punktów P płaszczyzny, dla których moduł różnicy odległości od punktów F_1 i F_2 jest równy d, gdzie d jest ustaloną liczbą mniejszą od odległości ognisk F_1 i F_2. ■

32. Dowieść, że środki wszystkich tych odcinków równoległych do prostej $y = 2x - 5$, których oba końce leżą na elipsie o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, znajdują się na jednej prostej. Czy każdy punkt tej prostej jest środkiem jednego z opisanych odcinków?
Znaleźć wszystkie proste równoległe do prostej $y = 2x - 5$, które mają dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

33. Niech $F_1 = (0, \sqrt{5})$, $F_2 = (0, -\sqrt{5})$ i $A = \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$. Znaleźć prostą ℓ przechodzącą przez punkt A, której jedynym punktem wspólnym z elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ jest punkt A. Wykazać, że kąt między odcinkiem F_1A i prostą ℓ równy jest kątowi między odcinkiem F_2A i prostą ℓ.

34. Wykazać, że parabole $y = x^2$ i $y = 9x^2$ są podobne.
Dwa zbiory C i D na płaszczyźnie nazywamy podobnymi, jeśli istnieje takie przekształcenie $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i liczba $k > 0$, że stosunek odległości punktów $P(\mathbf{x}_1)$ i $P(\mathbf{x}_2)$ do odległości punktów $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ i $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ jest równy k dla dowolnych różnych punktów $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ oraz $P(C) = D$.

35. Ile punktów wspólnych z okręgiem może mieć wykres funkcji kwadratowej?

36. Ile punktów wspólnych mogą mieć dwie parabole?

37. Ile punktów wspólnych mogą mieć: elipsa o równaniu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ i okrąg o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$?

38. Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma 2 pierwiastki x_1, x_2. Znaleźć równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są

(a) liczby x_1^2 i x_2^2, (b) liczby $-x_1$ i $-x_2$,
(c) liczby $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$, (d) liczby $2x_1$ i $2x_2$.

39. Dla jakich liczb λ równanie $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda - 2 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

40. Znaleźć odległość punktu $(1, 2)$ od prostej, której o równaniem jest: $x - 3y + 2 = 0$.

41. Wykazać, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, to zachodzi równość $(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2-4ac}{a^2} = \frac{\Delta}{a^2}$.

42. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste różnych znaków?

43. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, między którymi znajduje się liczba 1?

44. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a \neq 0, b, c$, aby równanie $ax^2 + bx + c = 0$ miało dwa pierwiastki rzeczywiste, których suma jest równa ich iloczynowi?

45. Ile pierwiastków ma równanie $x^4 + 2(m - 4)x^2 + 4 = 0$ w zależności od parametru m?

46. Ustalić w zależności od parametru m liczbę pierwiastków równania $x^4 + (2m - 4)x^2 - m^2 + 4m - 2 = 0$.

47. Wykazać, że jeśli $x^3 + 2px + q = 0$, to $xq \leqslant p^2$.

48. Wykazać, że jeśli $x > 0$, $y > 0$ i $x + y = 1$, to zachodzi nierówność: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

49. Wyrażenie $\sqrt{x-1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x-1}}$ jest stałe na pewnym przedziale. Znaleźć ten przedział.

50. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają następującą równość $a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4$. Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

51. Niech m, n będą liczbami naturalnymi. Wykazać, że liczba $\sqrt{2}$ leży między liczbami $\frac{m}{n}$ i $\frac{m+2n}{m+n}$.

52. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x - |y + 1| = 1, \\ x^2 + y = 10. \end{cases}$

53. Znaleźć wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których zachodzi nierówność

$$\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geqslant \frac{2}{3}.$$

54. Niech $a > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Udowodnić, że zbiór punktów leżących nad parabolą $y = ax^2$ jest wypukły, tzn. jeśli $y_1 \geqslant ax_1^2$ i $y_2 \geqslant ax_2^2$ i $0 < t < 1$, to

$$ty_1 + (1-t)y_2 \geqslant a\big(tx_1 + (1-t)x_2\big)^2 .$$

55. Udowodnić, że parabola $y = ax^2 + bx + c$ jest zbiorem złożonym z punktów równoodległych od pewnego ustalonego punktu i pewnej ustalonej prostej.
Jest to geometryczna definicja paraboli, ustalony punkt nazywany jest ogniskiem, a prosta — kierownicą.

56. Udowodnić, że przez każdy punkt paraboli przechodzą dwie proste mające z parabolą jeden punkt wspólny.
Ta która nie jest równoległa do osi symetrii paraboli nazywana jest styczną.

57. Jeśli F jest ogniskiem paraboli $y = ax^2$, d — jej kierownicą, P punktem paraboli, to prosta t — styczna do paraboli w punkcie P jest dwusieczną kąta między prostą PF i prostą pionową przechodząca przez punkt P.
Oznacza to, że jeśli umieścimy „punktowe" źródło światła w ognisku F zwierciadła parabolicznego, tj. otrzymanego w wyniku obrotu paraboli wokół jej osi symetrii, to po odbiciu od zwierciadła otrzymamy wiązkę promieni równoległych.
Ta własność paraboli decyduje o tym, że np. anteny radioteleskopów mają kształt paraboliczny.