FUNKCJE LICZBOWE

Zbiory postaci $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x \leqslant a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x \geqslant a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ x > a\}$ oznaczane są symbolami $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, (∞, a) i (a, ∞). Nazywamy półprostymi domkniętymi lub otwartymi o końcu a. Symbol ∞ odczytujemy jako nieskończoność — nie oznacza on żadnej liczby, więc nie można wykonywać działań z jego użyciem. Później niektóre działania z jego użyciem zostaną zdefiniowane.

Zbiory postaci $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a \leqslant x \leqslant b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a < x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a \leqslant x < b\}$, $\{x \in \mathbb{R}\colon \ a < x \leqslant b\}$ nazywamy przedziałami, kolejno: domkniętym, otwartym, domknięto–otwartym i otwarto–domkniętym. Oznaczamy je następującymi symbolami $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$.

Jeśli $D \subseteq \mathbb{R}$ jest dowolnym zbiorem, a $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, to f nazywamy funkcją liczbową. Najczęściej będziemy rozważać funkcje określone na całym zbiorze $\mathbb{R}$, na półprostych, na przedziałach lub sumach przedziałów i półprostych.

Przykład 10.1 Funkcja pierwiastek kwadratowy jest określona na domkniętej półprostej $[0, \infty)$, więc $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$. ■

Przykład 10.2 Funkcję pierwiastek trzeciego stopnia określamy na całej prostej $\mathbb{R}$, więc $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $D = \mathbb{R}$. ■

Przykład 10.3 Niech $D = \{x \in \mathbb{R}\colon \ x \neq 1\}$ czyli $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Wzór $f(x) = \frac{x}{x-1}$ określa funkcję na D. ■

Przykład 10.4 Przyjmijmy $D = \mathbb{R}$ i zdefiniujmy funkcję wzorem $f(x) = \lfloor x \rfloor$, gdzie przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą spośród liczb całkowitych z półprostej $(-\infty, x]$. Prawdziwe są więc równości: $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -\frac{3}{2} \rfloor = -2$. Później wykażemy, że ta definicja jest poprawna, tzn., że dla każdej liczby rzeczywistej x istnieją takie liczby całkowite m, n, że zachodzi nierówność $m < x < n$, co wygląda na oczywiste stwierdzenie, tym nie mniej wymaga dowodu, jeśli chcemy mieć pewność, że wszystko o czym mówimy, wynika z przyjętych założeń, czyli pewników. ■

Przykład 10.5 Funkcja Dirichleta. Niech $D = \mathbb{R}$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą niewymierną,} \\ 1 & \text{jeśli } x \text{ jest liczbą wymierną.} \end{cases} \blacksquare$$

Przykład 10.6 $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. $\blacksquare$

W analizie często piszemy $f(x)$ zamiast f. Mówimy wtedy o funkcji $\frac{x}{x-1}$, x^2, $x - 13$ itp. Zazwyczaj przyjmujemy wtedy, że dziedziną jest największy zbiór, na którym funkcję można zdefiniować danym wzorem. Nie zawsze jest to całkiem jasne. Wtedy trzeba wyraźnie napisać, czym jest dziedzina funkcji. Przy takiej umowie (na ogół milczącej) pamiętamy, że równość $f(x) = g(x)$ oznacza równość **wartości** funkcji f i g w punkcie x, a nie równość funkcji f i g.

Funkcje liczbowe określone na tym samym zbiorze można dodawać, odejmować i mnożyć oraz mnożyć przez liczbę. Stosujemy wtedy oznaczenia $f+g$, $f-g$, fg i cf. Jeśli funkcja f nie znika w żadnym punkcie, tzn. jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to możemy też mówić o ilorazie $\frac{f}{g}$.

Uwaga 10.1
Przypominamy, że funkcją odwrotną do funkcji $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy taką funkcję $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą obie równości $f(g(x)) = x$ i $g(f(x)) = x$. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczamy symbolem $f^{-1}(x)$. Jeśli $f(x) = x^3$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, więc na ogół $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{x^3}$. $\blacksquare$

Definicja 10.2 (funkcji ograniczonej)
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną z góry liczbą M wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \leqslant M$ dla każdego $x \in D$. Analogicznie funkcja f jest ograniczona z dołu liczbą m wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \geqslant m$ dla każdego $x \in D$. Jeśli funkcja f jest ograniczona z góry i z dołu, to mówimy, że jest ograniczona. $\blacksquare$

Funkcja Dirichleta jest ograniczona z góry przez 1, albo przez 378, a z dołu przez 0, więc jest ograniczona. Funkcja pierwiastek kwadratowy jest nieograniczona, choć jest ograniczona z dołu np. przez 0. Funkcja $\frac{x}{x-1}$ nie jest ograniczona ani z góry, ani z dołu.

Definicja 10.3 (funkcji monotonicznych)
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ściśle rosnącą, jeśli z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) < f(y)$, ściśle malejącą, jeśli z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) > f(y)$.
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcją niemalejącą wtedy i tylko wtedy, gdy z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \leqslant f(y)$.
Funkcję $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcją nierosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy z nierówności $x < y$ wynika nierówność $f(x) \geqslant f(y)$.
Funkcje ściśle rosnące i funkcje ściśle malejące nazywamy ściśle monotonicznymi, a funkcje nierosnące i niemalejące — monotonicznymi. ■

Ostrzegamy tu Czytelnika, że w wielu podręcznikach występują funkcje niemalejące i rosnące. W innych z kolei funkcje rosnące i ściśle rosnące. Autor tego tekstu przyjął skrajne terminy za obowiązujące, aby uniknąć nieporozumień.

Funkcje x, x^3 są ściśle rosnące na zbiorze $\mathbb{R}$. Funkcja $\lfloor x \rfloor$ jest niemalejąca na $\mathbb{R}$. Funkcja $\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$ jest ściśle malejąca, co Czytelnik powinien sprawdzić dokładnie. Funkcja x^2 **nie** jest ściśle rosnąca, ani nawet niemalejąca, bo $(-2 < -1$ i jednocześnie $4 = (-2)^2 < (-1)^2 = 1$. Nie jest też nierosnąca, więc tym bardziej nie jest ściśle malejąca, bo $1 < 2$ i $1 = 1^2 < 2^2 = 4$. Wobec tego funkcja x^2 nie jest monotoniczna na $\mathbb{R}$. Jest natomiast ściśle rosnąca na $[0, \infty)$ i jest ściśle malejąca na $(-\infty, 0]$, więc na każdej z tych półprostych jest ściśle monotoniczna.

Niech będą dane dwie funkcje f i g. Mówimy wtedy, że zbiór $\{x\colon\ \ f(x) < g(x)\}$ jest rozwiązaniem nierówności $f(x) < g(x)$, a zbiór $\{x\colon\ \ f(x) = g(x)$ rozwiązaniem równania $f(x) = g(x)$.

Liczby x, dla których spełniona jest równość $f(x) = 0$ nazywamy pierwiastkami funkcji f, czasem też mówimy, że są one zerami tej funkcji. Liczba -2 jest pierwiastkiem funkcji $x^2 - 4$, ale nie jest prawdą, że $\sqrt{4} = -2$.

Wykres funkcji liczbowej f, czyli zbiór wszystkich par postaci $\big(x, f(x)\big)$ jest podzbiorem $\mathbb{R}^2$, więc można go rysować na płaszczyźnie, na której obrano układ współrzędnych. Wtedy rozwiązanie równania $f(x) = g(x)$ składa się z pierwszych współrzędnych punktów wspólnych wykresów funkcji f i g. Podobnie można opisać zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < g(x)$.

W dalszej części zajmiemy się badaniem funkcji postaci

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \,. \qquad \text{(wiel)}$$

Definicja 10.4 (wielomianu)
Jeśli $a_k \neq 0$, to taką funkcję postaci (wiel) nazywamy wielomianem k–tego stopnia. Jeśli $0 = a_0 = a_1 = \ldots = a_k$, to nazywamy taką funkcję wielomianem zerowym, którego stopień definiujemy jako $-\infty$. ■

W wielu podręcznikach stopień wielomianu zerowego nie jest definiowany w ogóle. Później udowodnimy, że jeśli równość

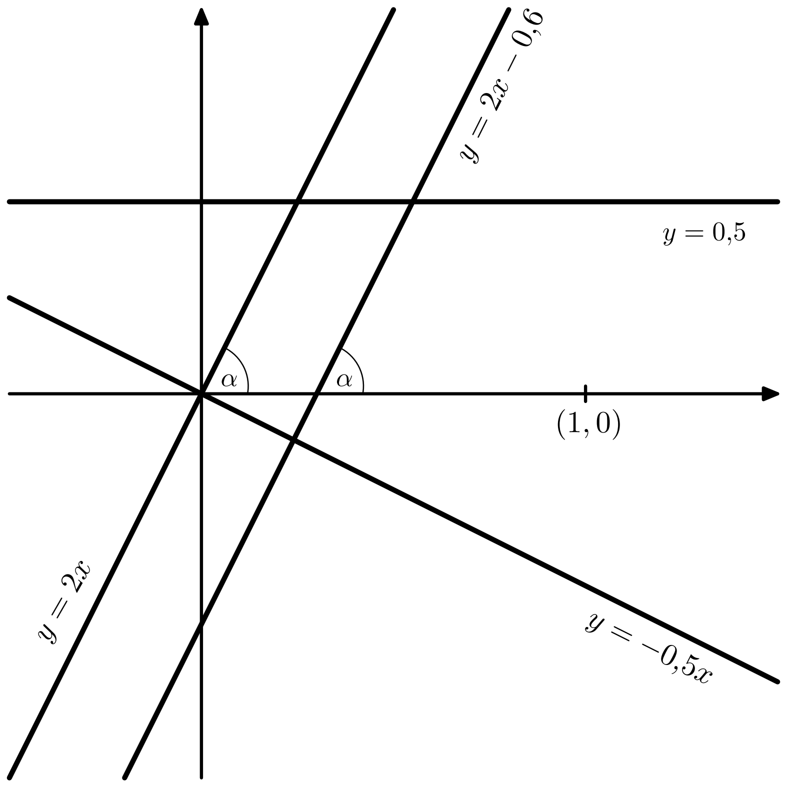
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

zachodzi dla nieskończenie wielu liczb x, to $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, możemy przyjąć, że $0 = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$. Analogicznie $0 = b_{n+1} - b_{n+2} = \ldots$ To stwierdzenie oznacza, że funkcję można zapisać w postaci (wiel) na co najwyżej jeden sposób, dzięki czemu podana definicja ma sens.

Funkcja $1 - x$ jest wielomianem pierwszego stopnia. Funkcja $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ jest wielomianem trzeciego stopnia.

Definicja 10.5
Przyjmujemy, że dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzą wzory $a + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$, $a - (-\infty) = \infty$. Przyjmujemy też, że $-\infty < a < \infty$. ■

Teraz zajmiemy się wielomianami postaci $ax+b$. Jeśli $a = 0$, to mamy do czynienia z funkcją stałą. Jej wykresem jest linia prosta równoległa do osi OX, czyli pozioma (jeśli osie układu są narysowane standardowo).



Jest też jasne, że jeżeli $b \neq 0$, to wykresy wielomianów ax i $ax + b$ nie mają punktów wspólnych. Można powiedzieć, że wykres wielomianu $ax+b$ otrzymujemy przesuwając wykres wielomianu ax o b jednostek równolegle do osi OY. Ponieważ stosunek $\frac{ax}{x}$ jest równy a dla każdego $x \neq 0$, więc wykresem wielomianu ax jest prosta przechodząca przez punkt $(0, 0)$ i punkt $(1, a)$. Jeżeli $a \neq 0$, to tangensem kąta ostrego jaki ta prosta tworzy z osią OX jest liczba $|a|$, bowiem długości przyprostokątnych w trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, a)$ są równe 1 oraz $|a|$, przy czym ta o długości $|a|$ leży naprzeciw kąta, którym się zainteresowaliśmy.

Wynika stąd, że wykresem wielomianu $ax + b$ jest prosta, która równoległa do opisanej poprzednio. Przecina ona oś pionową w punkcie $(0, b)$, a poziomą — w punkcie $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja $ax + b$ jest ściśle rosnąca, jeśli $a < 0$ — ściśle malejąca. W obu przypadkach jest nieograniczona i to zarówno z dołu jak i z góry. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej $y = ax + b$.

Zadania

1. Udowodnić, że funkcja $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$.

2. Znaleźć maksymalne przedziały, na których funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ jest monotoniczna.

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja $\frac{x^2}{x^2+2x+2}$ jest ograniczona. Znaleźć maksymalne przedziały, na których jest monotoniczna.

4! Czy iloczyn funkcji ściśle rosnących jest ściśle rosnący. Czy suma funkcji ściśle rosnących jest ściśle rosnąca?

5! Dowieść, że złożenie funkcji ściśle monotonicznych jest też funkcją ściśle monotoniczną.

6! Czy funkcja odwrotna do funkcji monotonicznej jest ściśle monotoniczna?

7. Znaleźć taki wielomian f (możliwie niskiego stopnia), że dla każdej liczby $x \neq 0$ zachodzi równość $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

8! Naszkicować wykres funkcji $|x+3| - |x-1|$.

9. Znaleźć taki wielomian w pierwszego stopnia, że $w(x) \notin \mathbb{Z}$ dla $x \in \mathbb{Z}$.

10. Znaleźć wielomian w pierwszego stopnia, którego wykres przechodzi przez dokładnie jeden punkt o obu współrzędnych całkowitych.

11! Udowodnić, że jeśli wykres wielomianu pierwszego stopnia przechodzi przez dwa punkty o obu współrzędnych całkowitych, to przechodzi przez nieskończenie wiele takich punktów.

12. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych $a_1, a_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(a_1x_2 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2)$, to funkcja f jest wielomianem stopnia nie większego niż 1.

13. Rozwiązać równanie $x^2 = \lfloor x \rfloor$.

14! Udowodnić, korzystając ewentualnie z twierdzenia Pitagorasa, że proste $y = ax$ i $y = Ax$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $aA = -1$.

15! Zbiór wszystkich punktów (x, y), dla których spełniona jest równość $5x - 12y + 13 = 0$, jest prostą. Udowodnić, że odległość punktu $(2, 3)$ od tej prostej jest równa $\frac{|5\cdot 2 - 12\cdot 3 + 13|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$.