PODSTAWOWE WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ I NIERÓWNOŚCI W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH

W dalszym ciągu będziemy zajmować się głównie własnościami liczb rzeczywistych, funkcjami określonymi na zbiorach złożonych z liczb rzeczywistych, których wartościami są liczby rzeczywiste. Historia liczb rzeczywistych jest bardzo długa. Ludzie najpierw posługiwali się liczbami naturalnymi, następnie wymiernymi dodatnimi, później odkryto liczby niewymierne, wreszcie zaczęto też używać liczby ujemne.

Teoria liczb rzeczywistych została usystematyzowana dopiero w XIX wieku. Liczby naturalne, zgodnie ze swą nazwą, są najprostszym rodzajem liczb i dlatego często najpierw rozwijana jest ich teoria, następnie z ich pomocą konstruowane są liczby całkowite (jako różnice naturalnych), potem wymierne (jako ilorazy liczb całkowitych), wreszcie rzeczywiste. Ten ostatni krok jest dosyć pracochłonny.

Postąpimy więc odwrotnie — przyjmiemy bez dowodu pewne własności liczb rzeczywistych (będą to pewniki zwane też aksjomatami) i na ich podstawie udowodnimy pozostałe, określając ,,po drodze" liczby naturalne, całkowite i wymierne.

Zakładamy, że dany jest zbiór $\mathbb{R}$. Jego elementy nazywać będziemy liczbami rzeczywistymi. Zakładamy, że w zbiorze $\mathbb{R}$ są określone dwa działania — dodawanie $+$ oraz mnożenie $\cdot$, tzn. funkcje z $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, relacja mniejszości $<$. Są też wyróżnione elementy 0 i 1. Podamy teraz listę pewników.

D1 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a+b)+c = a+(b+c)$ — dodawanie jest łączne.

D2 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a+b = b+a$ — dodawanie jest przemienne.

D3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $a + x = 0$ — istnienie liczby przeciwnej.

D4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a + 0 = a$.

M1 Dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ — mnożenie jest łączne.

M2 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $a\cdot b = b\cdot a$ — mnożenie jest przemienne.

M3 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ istnieje taka liczba $x \in \mathbb{R}$, że $a \cdot x = 1$ — istnienie liczby odwrotnej.

M4 Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$ — charakteryzacja jedynki.

MD Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

N1 Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości $a < b$, $a = b$, $b < a$ — prawo trichotomii.

N2 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z nierówności $a < b$ i $b < c$ wynika, że $a < c$ — nierówność jest przechodnia.

N3 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z nierówności $a < b$ wynika, że $a + c < b + c$ — do nierówności można dodać stronami liczbę, to prawo wiąże nierówność z dodawaniem.

N4 Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ z tego, że $a < b$ i $0 < c$ wynika, że $a \cdot c < b \cdot c$ — nierówności można pomnożyć stronami przez liczbę dodatnią, to prawo wiąże nierówność z mnożeniem.

ZJ $0 \neq 1$.

Później uzupełnimy tę listę pewnikiem ciągłości, z którego na razie w ogóle nie będziemy korzystać.

Czytelnik może być zdziwiony obecnością założenia $0 \neq 1$, ale bez tego moglibyśmy teoretycznie zajmować się zbiorem jednoelementowym złożonym z samego zera. W nim wszystkie pewniki są spełnione, jeśli przyjmiemy, że $0 = 1$.

Udowodnimy teraz szereg prostych własności.

Stwierdzenie 8.1
Jeśli dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a + b = a$, to $b = 0$.
Dowód. Z **D3** wynika, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że $a + x = 0$. Mamy więc $0 = a + x = (a+b) + x = (b+a) + x = b + (a+x) = b + 0 = b$ — korzystaliśmy kolejno z określenia x, z przemienności dodawania, łączności dodawania, określenia x, własności liczby 0. ■

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny dodawania, mianowicie 0.

Stwierdzenie 8.2
Jeśli $y, z \in \mathbb{R}$ i zachodzi równość $a + y = a + z$, to $y = z$.
Dowód. Niech $a + x = 0$. Wtedy $y = y + 0 = y + (a+x) = (y+a)+x = (a+y)+x = (a+z)+x = (z+a)+x = z+(a+x) =$

$=z+0=z$. ■

Definicja 8.3 (liczby przeciwnej)

$-a$ oznacza jedyną liczbę taką, że $a+(-a)=0$. ■

To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 8.2.

Stwierdzenie 8.4

Dla każdych liczb $a,b\in\mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a+x=b$.

Dowód. Niech $x=(-a)+b$. Wtedy zachodzą równości $a+x=$ $=a+[(-a)+b]=[a+(-a)]+b=0+b=b+0=b$. Wykazaliśmy istnienie. Jednoznaczność wynika od razu ze stwierdzenia 8.2. ■

Definicja 8.5 (różnicy dwu liczb)

$a-b:=a+(-b)$. ■

Stwierdzenie 8.6

Dla każdego $a\in\mathbb{R}$ zachodzi $-(-a)=a$,
dla dowolnych $a,b\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $-(a+b)=-a-b$.

Dowód. $(-a)+[-(-a)]=0=a+(-a)=(-a)+a$, zatem na mocy stwierdzenia 8.2 zastosowanego do $-a$ zachodzi równość $-(-a)=a$.

Mamy $(a+b)+[-(a+b)]=0=a+(-a)=[a+(-a)]+0=$
$=[a+(-a)]+[b+(-b)]=\{[a+(-a)]+b\}+(-b)=$
$=\{a+[(-a)+b]\}+(-b)=\{a+[b+(-a)]\}+(-b)=$
$=\{[a+b]+(-a)\}+(-b)=[a+b]+[(-a)+(-b)]=[a+b]+[-a-b]$,
zatem ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $-(a+b)=-a-b$. ■

Następnych kilka stwierdzeń podamy bez dowodu, bo ich dowody polegają na zastąpieniu dodawania mnożeniem, co każdy Czytelnik zrobi sam bez kłopotu.

Stwierdzenie 8.7

Jeśli dla pewnych $a,b\in\mathbb{R}$, przy czym $a\neq 0$, zachodzi równość $a\cdot b=a$, to $b=1$. ■

Z tego stwierdzenia wynika przede wszystkim, że istnieje dokładnie jeden element neutralny mnożenia, mianowicie 1.

Stwierdzenie 8.8

Jeśli dla pewnych $y,z\in\mathbb{R}$ zachodzi równość $a\cdot y=a\cdot z$, przy czym $a\neq 0$, to $y=z$. ■

Definicja 8.9 (elementu odwrotnego)
Jeśli $a \neq 0$, to a^{-1} oznacza jedyną liczbę taką, że $a \cdot a^{-1} = 1$. ■
To, że liczba, o której jest mowa jest tylko jedna wynika od razu ze stwierdzenia 8.8.

Stwierdzenie 8.10
Dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a \cdot 0 = 0$.
Dowód. Mamy $a+a\cdot 0 = a\cdot 1+a\cdot 0 = a\cdot(1+0) = a\cdot 1 = a = a+0$. Stąd i ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $a \cdot 0 = 0$. ■

Z tego stwierdzenia wynika, że nie wolno dzielić równości przez liczbę 0: z równości $a \cdot 0 = b \cdot 0$ nie wynika, że $a = b$.

Stwierdzenie 8.11
Jeśli $a \neq 0$, to $a^{-1} \neq 0$.
Dowód. Jeśli $a^{-1} = 0$, to $0 = a \cdot 0 = a \cdot a^{-1} = 1$, wbrew temu, że $0 \neq 1$, zatem $a^{-1} \neq 0$. ■

Stwierdzenie 8.12
Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, istnieje dokładnie jedna taka liczba x, że $a \cdot x = b$. ■

Definicja 8.13 (ilorazu dwu liczb)
$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$. ■

Stwierdzenie 8.14
Dla każdego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi $(a^{-1})^{-1} = a$, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. ■

Stwierdzenie 8.15
Jeśli $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.
Dowód. Mamy $a \cdot 0 = 0 = a \cdot b$, więc jeśli $a \neq 0$, to na mocy stwierdzenia 8.8 zachodzi $0 = b$. ■

Stwierdzenie 8.16
Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości $(-a)b = a(-b) = -ab$ oraz $(-a)(-b) = ab$. W szczególności $(-1)a = -a$.
Dowód. $a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = b \cdot 0 = 0 = a \cdot b + [-(a \cdot b)]$. Ze stwierdzenia 8.2 wynika, że $(-a)b = -ab$. Stąd $a(-b) = (-b)a = -ba = -ab$ i $(-a)(-b) = -a(-b) = -[(-b)a] = -[-ba] = -[-ab] = ab$ — ostatnią równość wywnioskowaliśmy ze stwierdzenia 8.6.

Stwierdzenie 8.17
Dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a(b-c) = ab - ac$.

Dowód. Mamy $a(b-c) = a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c) = {=}a \cdot b + (-a \cdot c) = ab - ac$. ■

Stwierdzenie 8.18
Jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Dowód. Z tego, że $a < b$ wynika, że $a + c < b + c$. Z tego, że $c < d$ wynika, że $b + c = c + b < d + b$. Z przechodniości nierówności wynika, że $a + c < b + d$. ■

Stwierdzenie 8.19
Jeśli $a < 0$, to $0 < -a$.

Dowód. Jeśli $a < 0$, to $0 = a + (-a) < 0 + (-a) = -a$. ■

Stwierdzenie 8.20
Jeśli jednocześnie $a < b$, $c < d$, $0 < b$, $0 < c$, to $ac < bd$.

Dowód. Z tego, że $a < b$ i $0 < c$ wynika, że $ac < bc$. Z tego, że $c < d$ i $0 < b$ wynika, że $bc = cb < db = bd$. Teza wynika z przechodniości nierówności. ■

Stwierdzenie 8.21 (prawa znaków)
Jeśli $0 < a$ i $0 < b$, to $0 < ab$. Jeśli $0 < a$ i $b < 0$, to $ab < 0$. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < ab$.

Dowód. Pierwsza część wynika z N4 i stwierdzenia 8.10. Jeśli $a < 0 < b$, to $0 < -a$, więc $0 < (-a)b = -ab$ i wobec tego $ab < (-ab) + ab = 0$. Udowodniliśmy drugą część. Jeśli $a < 0$ i $b < 0$, to $0 < -a$ i $0 < -b$, zatem $0 < (-a)(-b) = ab$. ■

Definicja 8.22 (cyfr)
$2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, $5 := 4 + 1$, $6 := 5 + 1$, $7 := 8 + 1$, $8 := 7 + 1$, $9 := 8 + 1$. ■

Definicja 8.23 (kwadratu)
Dla każdej liczby rzeczywistej a definiujemy $a^2 := a \cdot a$.

Stwierdzenie 8.24
Jeśli $a \neq 0$, to $0 < a^2$.

Dowód. Mamy $a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) > 0$, zatem a^2 jest iloczynem dwu liczb dodatnich, bo $a < 0 \Rightarrow 0 < -a$. ■

Stwierdzenie 8.25
$1 > 0$.
Dowód. $1 = 1^2$. ■

Od tej pory będziemy również pisać $a > b$ oczywiście wtedy i tylko wtedy, gdy $b < a$. Również $a \leqslant b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a < b$ lub $a = b$. Używany będzie też symbol $a \geqslant b$.

Definicja 8.26 (wartości bezwzględnej czyli modułu)

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeżeli } a \geqslant 0, \\ -a & \text{jeżeli } a < 0. \end{cases}$$ ■

Stwierdzenie 8.27
Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to $|-a| = |a|$, $|a| \geqslant a$, $|ab| = |a| \cdot |b|$,
$|a + b| \leqslant |a| + |b|$, $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.
Dwie ostatnie nierówności zwane są nierównościami trójkąta.
Dowód. Pierwsza równość jest zupełnie oczywista. Jeśli $a \geqslant 0$, to $|a| = a$, jeśli $a < 0$, to $|a| = -a > 0 > a$, zatem zawsze $|a| \geqslant a$. Stąd wynika, że $|a| + |b| \geqslant a + b$ oraz $|-a| + |-b| \geqslant$ $\geqslant -a + (-b) = -(a + b)$, a ponieważ $|a + b|$, to większa z liczb $a+b$ i $-(a+b)$, więc $|a|+|b| \geqslant |a+b|$. Z tej nierówności wynika, że $|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|$, zatem $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Oczywiście $|a - b| = |b - a| \geqslant |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. Z dwu nierówności $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ i $|a - b| \geqslant -(|a| - |b|)$ wynika, że $|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$. ■

Tu drobny komentarz. Jeśli myślimy o liczbach rzeczywistych jako o punktach osi liczbowej, to liczba $|a| = |a-0|$ jest odległością punktu a od punktu 0, $|a - b|$ to odległość punktów a i b. Wobec tego ostatnia nierówność mówi, że różnica dwóch boków ,,trójkąta" o wierzchołkach 0, a i b nie jest większa niż trzeci bok. Nierówność nie jest ostra, bo wszystkie trzy wierzchołki tego ,,trójkąta" leżą na jednej prostej. Nierówność $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ mówi, że bok ,,trójkąta" o wierzchołkach a, 0 i $-b$ nie jest większy niż suma dwóch pozostałych jego boków.

Zadania

Korzystając jedynie z pewników i własności udowodnionych w tym rozdziale udowodnić, że:

1! $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

2! Jeśli $a + c < b + c$, to $a < b$.

3! Jeśli $c > 0$ i $ac > bc$, to $a > b$.

4! Jeśli $c < 0$ i $ac > bc$, to $a < b$.

5. $a^2 + b^2 \geqslant ab$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$.

6. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqslant (ax + by)^2$ dla dowolnych $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

7. $a > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{-1} > 0$.

8! $|a| \leqslant c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-c \leqslant a \leqslant c$.

9! $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ab \geqslant 0$.

10. Jeśli $|a - b| \leqslant a$, to $ab \geqslant 0$. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?

11. Jeśli $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

12. Jeśli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

13. $x^2 + x + 1 > 0$ i $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

14. $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

15. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| < 7$?

16. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 1| > 7$?

17. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 6| = 8$?

18. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 9$?

19. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x+1}{x+2}\right| > 1$?

20. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\left|\frac{x-4}{x^2+x+5}\right| > 1$?

21. Niech $\max(a, b)$ oznacza większą z liczb a, b, $\min(a, b)$ — mniejszą z nich, $\max(a, a) = a = \min(a, a)$. Dowieść, że $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$. Wyrazić podobnie $\min(a, b)$.

22. Niech $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Definiujemy dodawanie, mnożenie i nierówność wzorami (elementy zbioru $\mathbb{Z}_3$ to reszty z dzielenia przez 3) $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $0 + 2 = 2 + 0 = 2$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 2 + 1 = 0$, $2 + 2 = 1$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 2 = 2 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$, $0 < 1 < 2 < 0$. Dowieść, że wtedy w zbiorze $\mathbb{Z}_3$ spełnione są wszystkie pewniki z wyjątkiem N2 (przechodniości nierówności). A jak jest w podobnie zdefiniowanych zbiorach $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_5$?

23. Wykazać, że w $\mathbb{Z}_5$ każdy niezerowy element ma odwrotność, a w $\mathbb{Z}_4$ — tylko niektóre.

24. Wywnioskować przemienność dodawania z pozostałych pewników.