RELACJE I FUNKCJE

Definicja 7.1 (relacji)
Dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ nazywamy relacją. Mówimy, że element x zbioru X jest w relacji z elementem y zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy para (x, y) jest elementem zbioru R. Piszemy wtedy xRy. Jeśli $X = Y$, to mówimy o relacji w zbiorze X. ■

Przykład 7.1 Podzbiór $\{(x, y) \in X \times X\colon \quad x = y\}$ zbioru $X \times X$ nazywamy relacją równości w zbiorze X. ■

Przykład 7.2 Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon \quad x < y\}$ zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ nazywamy relacją mniejszości w zbiorze liczb naturalnych. ■

Przykład 7.3 Podzbiór $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\colon \quad y = x^2 + 1\}$ zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest relacją w zbiorze $\mathbb{N}$. ■

Przykład 7.4 Niech X będzie zbiorem wszystkich odcinków na płaszczyźnie. W zbiorze tym określamy relację przystawania przyjmując, że dwa odcinki są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy mają równą długość. ■

Definicja 7.2 (relacji równoważności)
Relacja R w zbiorze X nazywana jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące trzy warunki:
1° $\forall_{x\in X}\, xRx$, czyli relacja R jest zwrotna;
2° $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\, xRy \Leftrightarrow yRx$, czyli relacja R jest symetryczna;
3° $\forall_{x\in X}\forall_{y\in X}\forall_{z\in X}\, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, czyli relacja R jest przechodnia. ■

Czytelnik zauważy bez trudu, że relacje 7.1 i 7.4 są relacjami równoważności, natomiast relacja 7.2 nie jest symetryczna ani zwrotna. Relacja 7.3 nie jest ani zwrotna, ani symetryczna, ani przechodnia.

Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to zbiór $[x]$ złożonych z tych elementów zbioru X, które są w relacji R z elementem x, tzn. $[x] = \{y \in X\colon \quad xRy\}$, nazywamy klasą abstrakcji elementu x. Relacje równoważności zbioru X wyznacza jego podział na klasy abstrakcji, tzn. prawdziwe jest

Twierdzenie 7.3
Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to każdy element zbioru X należy do dokładnie jednej klasy abstrakcji, różne klasy abstrakcji są rozłączne.

Dowód. Ze zwrotności relacji R wynika, że $x \in [x]$. Załóżmy, że $t \in [x] \cap [y]$. Niech $s \in [x]$. Wtedy xRt, yRt i xRs. Z symetryczności R wynika, że tRx. Teraz skorzystamy dwa razy z przechodniości: $(yRt) \wedge (tRx) \Rightarrow (yRx)$ i $(yRx) \wedge (xRs) \Rightarrow (yRs)$. Wykazaliśmy, że jeśli $s \in [x]$, to $s \in [y]$, czyli $[x] \subseteq [y]$. Analogicznie dowodzimy, że $[y] \subseteq [x]$. Oznacza to, że $[x] = [y]$. ■

Czytelnik łatwo sprawdzi, że klasy abstrakcji relacji równości są jednoelementowe, a klasy relacji przystawania odcinków składają się z nieskończenie wielu elementów.

Inną ważną grupę stanowią relacje porządkujące.

Definicja 7.4 (relacji porządkującej)
Relacja R nazywana jest porządkującą, albo porządkiem w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:
1° jest przechodnia, czyli $\forall_{x \in X} \forall_{y \in X} \forall_{z \in X}\, (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;
2° dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości: xRy, yRx, $x = y$ — ta własność to **trichotomia**. ■

Relacja mniejszości w zbiorze liczb naturalnych jest porządkiem, natomiast relacja $x \leq y$ porządkiem już nie jest. Alfabetyczna lista uczniów danej klasy wyznacza porządek w zbiorze uczniów, pod warunkiem że w klasie nie ma dwóch uczniów o tym samym imieniu i nazwisku.

Jednym z najważniejszych pojęć w matematyce jest pojęcie funkcji. Zaczniemy od definicji.

Definicja 7.5 (funkcji)
Jeśli każdemu elementowi $x \in X$ przypisany został dokładnie jeden element $y \in Y$, to mówimy, ze zdefiniowana została funkcja przekształcająca zbiór X w zbiór Y. Jeśli tę funkcję oznaczymy przez f, to piszemy $f\colon X \longrightarrow Y$. Element $y \in Y$ przyporządkowany **argumentowi** $x \in X$ oznaczamy symbolem $f(x)$, więc $y = f(x)$, i nazywamy go **obrazem** punktu x lub **wartością** funkcji f w punkcie x. Zbiór X nazywamy **dziedziną** lub

zbiorem argumentów funkcji f, zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną** funkcji f, a jego podzbiór $\{y \in Y\colon \ \exists_{x\in X}\, y = f(x)\}$ złożony ze wszystkich wartości funkcji f nazywamy zbiorem wartości funkcji f i oznaczamy symbolem $f(X)$. ■

Jasne jest, że funkcja jest szczególnym przypadkiem relacji.

Przykład 7.5 Jeśli funkcja $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ przypisuje każdej liczbie naturalnej x jej kwadrat, to możemy napisać $f(x) = x^2$. W tym przypadku dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb naturalnych, przeciwdziedziną też ten zbiór, a zbiorem wartości tej funkcji zbiór $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. ■

Przykład 7.6 Funkcja $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ przypisuje każdej liczbie naturalnej jej ostatnią cyfrę, czyli cyfrę jedności (w zapisie dziesiętnym). Wtedy $f(1) = 1$, $f(13) = 3$, $f(107) = 7$, $f(350) = 0$ itd. Zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór wszystkich cyfr układu dziesiątkowego, czyli zbiór $\{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. ■

Przykład 7.7 Niech X oznacza zbiór wszystkich żyjących ludzi, a Y — zbiór wszystkich imion. Przypisując człowiekowi jego pierwsze imię, określamy funkcję na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y. Może się zdarzyć, że jakieś imiona są ,,chwilowo” nie wykorzystywane. W takiej sytuacji zbiór wartości określonej funkcji jest mniejszy niż jej przeciwdziedzina Y. ■

Przykład 7.8 Permutacje zbioru $X = \{1, 2, 3, \ldots , n\}$ można potraktować jako takie funkcje przekształcające zbiór X w siebie, które różnym elementom zbioru X przypisują różne wartości. ■

Przykład 7.9 Sumę dwu liczb naturalnych można potraktować jako wartość funkcji f określonej na zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{N}$. Wtedy $f(m, n) = m + n$. Tę funkcję nazywamy dodawaniem, jej wartość sumą. Jej zbiorem wartości jest $\{2, 3, 4, \ldots\}$, a przeciwdziedziną — zbiór $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. ■

Przykład 7.10 Jeśli X jest dowolnym zbiorem niepustym i $f(x) = x$ dla każdego $x \in X$, to funkcję f nazywamy identycznością lub tożsamością na zbiorze X. ■

Przykład 7.11 Jeśli $c \in Y$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi równość $g(x) = c \in Y$, to mówimy, że funkcja g jest stała, jej jedyną wartością jest c, jej zbiór wartości to $\{c\}$. ■

Przykład 7.12 Niech K będzie zbiorem kwadratów liczb naturalnych: $K = \{1, 4, 9, 16, \ldots\} = \{k \in \mathbb{N}: \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} k = n^2\}$. Wzór $h(k) = \sqrt{k}$ określa funkcję ze zbioru K w zbiór $\mathbb{N}$. ■

Definicja 7.6 (funkcji przekształcającej *na* **)**
Mówimy, że funkcja $f: X \longrightarrow Y$ przekształca zbiór X na zbiór Y wtedy i tylko wtedy, gdy $Y = f(X)$, czyli gdy obraz funkcji pokrywa się z jej przeciwdziedziną. Piszemy wtedy $f: X \xrightarrow{na} Y$. ■

Funkcje z przykładów 7.8, 7.10 i 7.12 przekształcają swe dziedziny na swe przeciwdziedziny.

Definicja 7.7 (funkcji różnowartościowej)
Mówimy, że funkcja $f: X \longrightarrow Y$ jest różnowartościowa, jeśli różnym elementom zbioru X przypisano różne elementy przeciwdziedziny Y: z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika równość $x_1 = x_2$. ■

Funkcje z przykładów 7.5, 7.8 i 7.10 są różnowartościowe.

Definicja 7.8 (złożenia funkcji)
Jeśli dane są dwie funkcje $f: X \longrightarrow Y$ i $g: Y \longrightarrow Z$, to funkcja $h: X \longrightarrow Z$ zdefiniowana wzorem $h(x) = g\big(f(x)\big)$ nazywana jest złożeniem funkcji g z funkcją f. Oznaczamy ją symbolem $g \circ f$. ■

Przykład 7.13 Niech funkcje $f, g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ będą dane wzorami $f(n) = n^2$, $g(n) = 2$. Wtedy $g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = g(n^2) = 2$ oraz $f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f(2) = 2^2 = 4$. Wynika stąd, że nawet jeśli $X = Z$, to na ogół $g \circ f \neq f \circ g$. ■

Definicja 7.9 (funkcji odwrotnej)
Funkcję $g: Y \longrightarrow X$ nazywamy odwrotną do funkcji $f: X \to Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje $g \circ f$ oraz $f \circ g$ są identycznościami. ■

Przykład 7.14 Identyczność jest funkcją odwrotną do siebie na dowolnym zbiorze. ■

Przykład 7.15 Niech $K = \{n^2\colon \quad n \in \mathbb{N}\}$. Niech $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow K$ będzie dana wzorem $f(n) = n^2$, a funkcja $g\colon K \longrightarrow \mathbb{N}$ — wzorem $g(k) = \sqrt{k}$. Wtedy $f\big(g(k)\big) = f(\sqrt{k}) = \big(\sqrt{k}\big)^2 = k$, zatem $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze K. $g\big(f(n)\big) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$, zatem również $g \circ f$ jest identycznością. Wobec tego g jest funkcją odwrotną do f. ■

Przykład 7.16 Niech $f(n) = n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech n będzie liczbą naturalną i niech $g(n)$ oznacza największą taką liczbę naturalną k, że $k^2 \leq n$, np. $g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 2$, $g(9) = 3$, $g(17) = 4$. Wtedy $g \circ f(n) = g\big(f(n)\big) = \\ = g(n^2) = n$, zatem $g \circ f$ jest identycznością. Mamy również $f\big(g(17)\big) = f(4) = 4^2 = 16$, zatem funkcja $f \circ g$ nie jest identycznością. Wobec tego funkcja g nie jest funkcją odwrotną do funkcji f pomimo tego, że $g \circ f = id$. ■

Twierdzenie 7.10 (o istnieniu funkcji odwrotnej)
Funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ ma funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa i przekształca zbiór X *na* zbiór Y.
Dowód. Załóżmy, że $g\colon Y \longrightarrow X$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f\colon X \longrightarrow Y$. Niech $x_1, x_2 \in X$ będą **różnymi** punktami dziedziny X. Jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = g\big(f(x_1)\big) = \\ = g\big(f(x_2)\big) = x_2$, wbrew założeniu, zatem $x_1 \neq x_2$. Wykazaliśmy różnowartościowość funkcji f. Mamy $y = f\big(g(y)\big)$ dla każdego $y \in Y$, zatem każdy element y zbioru Y jest wartością funkcji f.

Przypuśćmy teraz, że różnowartościowa funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ przekształca zbiór X na zbiór Y. Definiujemy: $g(y) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$. Ponieważ dla każdego punktu $y \in Y$ istnieje dokładnie jeden punkt $x \in X$ spełniający ten warunek, więc wzór $g(y) = x$ określa funkcję. Z określenia wynika, że $f\big(g(y)\big) = f(x) = y$ oraz $g\big(f(x)\big) = g(y) = x$, zatem $f \circ g = id$ i $g \circ f = id$, więc g jest funkcją odwrotną do f. ■

Wniosek 7.11 (z dowodu)
Jeśli funkcja f ma funkcję odwrtoną, to tylko jedną. ■

Definicja 7.12 (wykresu funkcji)
Wykresem funkcji $f\colon X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\{(x, f(x)) : \quad x \in X\}. \ \blacksquare$$

Z formalnego punktu widzenia nie ma żadnej różnicy między funkcją i jej wykresem. Prowadzi to do następującej definicji

Definicja 7.13 (funkcji)
Podzbiór $f \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją przekształcającą zbiór X w zbiór Y, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden taki element $y \in Y$, że $(x, y) \in f$. Ten element y nazywamy wartością funkcji f w punkcie x i oznaczamy symbolem $f(x)$. $\blacksquare$

Ta definicja ma tę przewagę nad podaną poprzednio, że nie występuje w niej niejasne pojęcie *przyporządkowania* — wszystko jest sprowadzone do zbiorów.

Rozpatrywanie wykresów często ułatwia badanie własności funkcji zwłaszcza wtedy, gdy mamy do czynienia z funkcjami, których argumentami i wartościami są liczby — możemy taką funkcję obejrzeć na obrazku.

Zadania

1. Ile jest relacji symetrycznych w zbiorze n–elementowym?

2! Ile jest wszystkich rekacji w zbiorze czteroelementowym?

3! Podać przykład relacji symetrycznej i przechodniej, która nie jest zwrotna.

4. Czy relacja R określona w zbiorze wszystkich liczb w następujący sposób: xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $x - y$ jest liczbą naturalną, jest relacją równoważności? A porządkiem?

5. Określmy w zbiorze takich par liczb całkowitych, których drugi element jest liczbą naturalną, relację R w następujący sposób: $(a, b)R(x, y) \Leftrightarrow ay = bx$. Wykazać, że R jest relacją równoważności.

6. Które z relacji z przykładów 7.1 — 7.4 są funkcjami?

7! Które z następujących przyporządkowań są funkcjami:

(a) człowiekowi przypisujemy jego matkę;

(b) człowiekowi przypisujemy jego babkę;

(c) liczbie wymiernej przypisujemy licznik ułamka przedsta wiającego ją w postaci ilorazu liczb całkowitych;

(d) liczbie naturalnej przypisujemy sumę jej cyfr w układzie dziesiętnym?

8! Podać przykład funkcji, która przekształca zbiór liczb naturalnych *na* zbiór:
(a) liczb całkowitych; (b) liczb wymiernych.

9! Czy okrąg jest wykresem funkcji, jeśli tak, to jakiej?

10. Dowieść, że jeśli funkcja przekształca odcinek w siebie nie zwiększając odległości między punktami (odległość punktów nie jest mniejsza niż odległość ich obrazów) i każdy koniec odcinka jest swym obrazem, to jest ona identycznością.

11. Dowieść, że jeśli funkcja przekształca kwadrat w siebie nie zwiększając odległości między punktami (por. poprzednie zadanie) i każdy wierzchołek kwadratu jest swoim obrazem, to funkcja ta jest identycznością.

12. Ile jest różnowartościowych funkcji przekształcających zbiór k–elementowy w zbiór n–elementowy?

13. Ile jest wszystkich funkcji przekształcających zbiór k–elementowy w zbiór n–elementowy?

14. Niech $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ będą liczbami pierwszymi, n_1, n_2, $\ldots$, n_k – naturalnymi. Dowieść, że liczba $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ ma $(n_1+1)(n_2+1) \cdot \ldots \cdot (n_k+1)$ dzielników naturalnych.

15. Niech X będzie zbiorem k–elementowym, 2^X — zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru X (łącznie z X i $\emptyset$). Niech a_1, a_2, $\ldots$, a_n będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$. Dowieść, że liczba takich funkcji $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow 2^X$, że
(a) zbiór $f(i)$ ma a_i elementów dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$,
(b) $f(i) \cap f(j) = \emptyset$, gdy $i \neq j$,
(c) $f(1) \cup f(2) \cup \ldots \cup f(n) = X$
jest równa $\frac{k!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$.

16. Korzystając z poprzedniego zadania znaleźć współczynnik przy $x^r y^s z^t$ w rozwinięciu $(x+y+z)^k$, tu $a^0 = 1$, $r,s,t \geqslant 0$, $r+s+t=k$, r,s,t — całkowite.