KWANTYFIKATORY

W matematyce często pojawiają się zdania postaci *dla każdego x zachodzi $\varphi(x)$*, *dla pewnego x zachodzi $\varphi(x)$*, np. dla każdej liczby naturalnej x zachodzi nierówność $x \geqslant 1$, dla pewnej liczby naturalnej x zachodzi nierówność $x < 100$, każdy zbiór zawiera zbiór pusty, istnieje liczba naturalna, która nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych (np. liczba 3).

Wyrażenia *dla każdego $x \dots$*, dla każdego $x \in A$ zastępujemy w razie potrzeby symbolem $\forall_x$. $\forall_{x\in A}$ — ten symbolem nazywamy kwantyfikatorem[6.1] ogólnym lub dużym. Wyrażenia *dla pewnego x*, *dla pewnego $x \in A$*, *istnieje takie x, że $\dots$*, *istnieje takie $x \in A$, że* zastępujemy symbolem $\exists$, $\exists_{x\in A}$. Ten symbol nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym lub małym, czasem egzystencjalnym.

Stosując wprowadzone właśnie oznaczenia zamiast słów można cztery zdania wypowiedziane na początku tego rozdziału zapisać tak: $(\forall_{x\in\mathbb{N}})(x \geqslant 1)$, $(\exists_{x\in\mathbb{N}})(x < 100)$, $(\forall_A)(A \supseteq \emptyset)$, $(\exists_{x\in\mathbb{N}})(\forall_{a,b\in\mathbb{Z}})(x \neq a^2 + b^2)$. Podkreślić wypada, że należy je przeczytać tak: *każda liczba naturalna x jest większa od 1 lub równa 1*, *istnieje liczba naturalna x mniejsza niż 100*, *każdy zbiór A zawiera zbiór pusty*, *istnieje liczba naturalna x, która nie jest równa sumie $a^2 + b^2$ dla każdych liczb całkowitych a, b* — tu symbole $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ oznaczają jak zwykle zbiory liczb naturalnych i całkowitych. Pod znakiem kwantyfikatora może też wystąpić zdanie, np. $(\forall_{x>7})(x^2 > 49)$, należy to przeczytać tak: kwadrat każdej liczby większej niż 7 jest większy niż 49.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 6.1 (wzory de Morgana)
$\neg(\forall_x\varphi(x)) \equiv \exists_x(\neg\varphi(x))$, $\quad \neg(\exists_x\varphi(x)) \equiv \forall_x\neg\varphi(x)$. ■

[6.1] Słowo kwantyfikator pochodzi od łacińskich słów **quantum** — ile i **facere** — czynić. Kwantyfikator ogólny oznacza, że zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe ogólnie (dla bardzo wielu, bo dla wszystkich x), kwantyfikator szczegółowy oznacza, że zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe dla co najmniej jednego x, czyli że jest prawdziwe w szczególnych przypadkach. Oznaczenie dziś stosowane pochodzą z angielskiego $\forall$ to odwrócona litera A, bo **dla każdego** to po angielsku **for all**, kwantyfikator szczegółowy oznaczamy symbolem $\exists$, więc odwróconą literą E, bo **istnieje** to po angielsku **exists**.

Wypowiemy je słowami. Zdanie *nieprawda, że dla każdego x zachodzi zdanie $\varphi(x)$* jest równoważne zdaniu *istnieje x, dla którego prawdą jest zaprzeczenia zdania $\varphi(x)$*. Zdanie *nie jest prawdą, że istnieje x, dla którego zdanie $\varphi(x)$ jest prawdziwe* jest równoważne zdaniu *dla każdego x prawdziwe jest zaprzeczenie zdania $\varphi(x)$*.

Przykład 6.1

$$\neg\big(\forall_{x\in\mathbb{N}}(x \geqslant 1)\big) \Leftrightarrow \big(\exists_{x\in\mathbb{N}}\neg(x \geqslant 1)\big) \Leftrightarrow \big(\exists_{x\in\mathbb{N}}(x < 1)\big)\,. \ \blacksquare$$

Przykład 6.2

$$\neg\big(\exists_{x\in\mathbb{N}}\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{N}}\big(\neg\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big(\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)\neg(x \neq a^2+b^2) \Leftrightarrow \big(\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{a,b\in\mathbb{Z}}\big)(x = a^2+b^2)\,. \ \blacksquare$$

Jeśli dwa kwantyfikatory ogólne występują jeden po drugim, to możemy zmienić ich kolejność: $\forall_x\forall_y\varphi(x,y) \Leftrightarrow \forall_y\forall_x\varphi(x,y)$, np. zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\forall_{y\in\mathbb{N}}(x^2+y+1 \in \mathbb{N})$ jest równoważne zdaniu $\forall_{y\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{N}}(x^2+y+1 \in \mathbb{N})$. To samo dotyczy kolejnych kwantyfikatorów szczegółowych.

Nie wolno zmieniać kolejności występowania kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego: zdania $\forall_x\exists_y(\varphi(x,y))$ i $\exists_y\forall_x(\varphi(x,y))$ na ogól nie są równoważne. Zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{y\in\mathbb{N}}(x < y+7)$ jest prawdziwe (czytamy je: dla każdej liczby naturalnej x istnieje taka liczba naturalna y, że $x < y+7$ — wystarczy przyjąć $y = x+1$). Zdanie $\exists_{y\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{N}}(x < y+7)$ jest fałszywe (czytamy je: istnieje taka liczba $y \in \mathbb{N}$, że nierówność $x < y+7$ zachodzi dla każdej liczby $x \in \mathbb{N}$), bowiem nie jest prawdą, że $y+8 < y+7$, a jeśli $y \in \mathbb{N}$, to również $y+8 \in \mathbb{N}$.

Jeśli A jest zbiorem niepustym, to ze zdania $\forall_{x\in A}\,\varphi(x)$ wynika zdanie $\exists_{x\in A}\,\varphi(x)$, np. ze zdania $\forall_{x\in\mathbb{N}}\,x \geqslant 1$ wynika zdanie $\exists_{x\in\mathbb{N}}\,x \geqslant 1$, np. $x = 1$. Odwrotnego wynikania na ogół nie ma, np. z prawdziwego zdania $\exists_{x\in\mathbb{N}}\,x^2 < 7$ nie wynika zdanie $\forall_{x\in\mathbb{N}}\,x^2 < 7$, które prawdziwe nie jest, bo na przykład nie jest prawdą, że $3^2 < 7$.

Symboli logicznych nie należy nadużywać, bo może prowadzić to do zapisu utrudniającego zrozumienie treści zdania. Przekonamy się, że w pewnych sytuacjach pomagają one np. zrozumieć różnicę między różnymi stwierdzeniami brzmiącymi dosyć podobnie. Jednak zdanie:

$$\exists_{p\in\mathbb{N}}\,\forall_{x\in\mathbb{N}}\,\forall_{y\in\mathbb{N}}\big(p\neq 1\wedge(p=xy\Rightarrow \\ \Rightarrow((x=1\wedge y=p)\vee(x=p\wedge y=1))\big)$$

jest równoważne zdaniu: *istnieje liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki* 1 *i* p, czyli zdaniu: *istnieje liczba pierwsza*. W tym przypadku, zdaniem autora, symbole logiczne raczej przeszkadzają.