DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Definicja 5.1 (sumy zbiorów)
Sumą $A \cup B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich elementów zbioru A i wszystkich elementów zbioru B:

$$s \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B\,,$$

czyli x jest elementem zbioru $A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do zbioru A lub do zbioru B. ■

Definicja 5.2 (części wspólnej zbiorów)
Częścią wspólną lub iloczynem $A \cap B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich tych elementów, które jednocześnie należą do zbioru A i do zbioru B:

$$s \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B\,.$$

Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to mówimy, że zbiory A i B są rozłączne. ■

Definicja 5.3 (różnicy zbiorów)
Różnicą $A \setminus B$ zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych elementów zbioru A, które nie są elementami zbioru B:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B\,. \ ■$$

Definicja 5.4 (iloczynu kartezjańskiego zbiorów)
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony ze wszystkich takich par (a, b), że $a \in A$ i $b \in B$. Pary różniące się kolejnością elementów uważamy za różne, tzn. $(a, b) = (c, d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$. Iloczyn kartezjański oznaczamy symbolem $A \times B$.
Przyjmujemy, że jeśli $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$, to $A \times B = \emptyset$. ■

Przykład 5.1 Niech $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{3,6,9\}$. Mamy $A \cup B = \{2,3,4,6,8,9\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A \setminus B = \{2,4,8\}$, $B \setminus A = \{3,9\}$.
Elementami zbioru $A \times B$ są pary:

$$\begin{array}{l}(2,3),\ (2,6),\ (2,9),\\ (4,3),\ (4,6),\ (4,9),\\ (6,3),\ (6,6),\ (6,9),\\ (8,3),\ (8,6),\ (8,9),\end{array}$$

a zbioru $B \times A$ — pary:

$$\begin{array}{l}(3,2),\ (3,4),\ (3,6),\ (3,8),\\ (6,2),\ (6,4),\ (6,6),\ (6,8),\\ (9,2),\ (9,4),\ (9,6),\ (9,8).\end{array}$$

I jeszcze np. $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(6,6)\}$. ■

Następujące twierdzenie wynika od razu z definicji:

Twierdzenie 5.5 (o przemienności i łączności)
Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą wzory:

$$A \cup B = B \cup A\,,\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,,$$
$$A \cap B = B \cap A\,,\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,. \blacksquare$$

Twierdzenie 5.6 (o rozdzielności)
Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,,$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

Dowód. Jeśli $x \in A$, to $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$, zatem $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Jeśli $x \in B \cap C$, to $x \in B \subseteq B \cup A$ oraz $x \in C \subseteq C \cup A$, zatem $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wykazaliśmy, że $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Załóżmy, że $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Wtedy $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$. Jeśli $x \in A$, to $x \in A \cup (B \cap C)$, a jeśli $x \notin A$, to $x \in B$ i $x \in C$, więc $x \in B \cap C$, zatem $x \in A \cup (B \cap C)$. Wobec tego $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Udowodniliśmy, że

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)\,.$$

Stąd wynika, że $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Drugą równość wykazujemy w taki sam sposób. ■

Twierdzenie 5.7 (o dopełnieniu dopełnienia)
Dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B\,.$$

Dowód. $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg\big(x \in A \wedge \neg(x \in B)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge \big(\neg(x \in A) \vee (x \in B)\big) \Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge \neg(x \in A)\big) \vee$
$\vee\big((x \in A) \wedge (x \in B)\big) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B$. ■

Uwaga 5.8
Jeśli $B \subseteq A$, to $A \setminus (A \setminus B) = B$. Czytelnik zwróci uwagę na to, że wzór ten bardzo przypomina prawo podwójnego przeczenia, zresztą użyte w dowodzie twierdzenia 5.7.

Warto też zauważyć, że dowodzone twierdzenie jest oczywiste: po usunięciu ze zbioru tych jego elementów, które są poza zbiorem B, zostają w zbiorze A tylko te elementy, które są elementami zbioru A, a to oznacza, że zbiór $A\setminus(A\setminus B)$ jest równy $A\cap B$. ■

Twierdzenie 5.9 (wzory de Morgana)
$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.
Dowód. Udowodnimy pierwszy z tych wzorów.
$x\in A\setminus(B\cup C)\Leftrightarrow(x\in A)\wedge\neg(x\in B\cup C)$
$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(\in B\vee x\in C)\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\big(x\in A\wedge\neg(x\in B)\big)\wedge\big(x\in A\wedge\neg(x\in C)\big)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x\in A\setminus B)\wedge(x\in A\setminus C)\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.
Dowód drugiego wzoru jest prawie taki sam. ■

Uwaga 5.10
W dowodzie twierdzenia 5.10 skorzystaliśmy z praw de Morgana z rachunku zdań. Czytelnik widzi, że po zastąpieniu koniunkcji zdań iloczynem zbiorów, alternatywy zdań — sumą zbiorów, zaprzeczenia zdania — odejmowaniem zbioru od zbioru A w prawach de Morgana z rachunku zdań, otrzymujemy wzory de Morgana dla rachunku zbiorów. ■

Zadania

1. Niech $n(A)$ będzie liczbą elementów zbioru skończonego A. Dowieść, że jeśli zbiory A i B są skończone, to $n(A\cup B)=$ $=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ i $n(A\setminus B)=n(A)-n(A\cap B)$.

2. Niech A_1, A_2, …, A_k będą zbiorami skończonymi. Udowodnić, że zachodzi wtedy wzór:
$$\begin{aligned}&n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k)=n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_k)-\\&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-\ldots-n(A_1\cap A_k)-n(A_2\cap A_3)-\\&-\ldots-n(A_{k-1}\cap A_k)+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+\\&\qquad+(-1)^{k-1}n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k).\end{aligned}$$

3. Różnicą symetryczną $A\dot{-}B$ dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony z tych i tylko tych elementów, które należą do dokładnie jednego z tych zbiorów, czyli $A\dot{-}B=$ $=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Udowodnić, że:

(1) $A\dot{-}B=B\dot{-}A$,

(2) $A \dot{-} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

(3) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$.

4. Udowodnić, że zbiór $A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k$ składa się z tych i tylko tych elementów, które należą do nieparzystej liczby zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$. (Nawiasów nie piszemy, bo na mocy poprzedniego zadania różnica symetryczna jest działaniem łącznym.)

5. Znaleźć wzór wyrażający liczbę elementów różnicy symetrycznej k zbiorów: $A_1 \dot{-} A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k$ w zależności od liczb $n(A_1)$, $n(A_2)$,$\ldots, n(A_k)$, $n(A_1 \cap A_2)$, $n(A_1 \cap A_3), \ldots,$ $n(A_{k-1} \cap A_k)$, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3), \ldots$, $n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$.