RACHUNEK ZDAŃ

Zdania z zakresu matematyki są albo prawdziwe, albo fałszywe — w matematyce nie stosuje się zdań wyrażających życzenie, przypuszczenie itp. Jeśli zdanie jest prawdziwe, to mówimy, że jego wartość logiczna jest 1, zdaniom fałszywym przypisujemy wartość logiczną 0.

Z dwóch zdań możemy utworzyć na wiele różnych sposobów nowe zdanie. Najprostsze metody w matematyce to:

(i) połączenie dwóch zdań α i β spójnikiem **i** — nowe zdanie to koniunkcja zdań α, β, oznaczamy je symbolem $\alpha \wedge \beta$.

(ii) połączenie dwóch zdań α i β spójnikiem **lub** — nowe zdanie to alternatywa zdań α, β, oznaczamy je symbolem $\alpha \vee \beta$.

(iii) zbudowanie zdania postaci „jeśli α, to β" — nowe zdanie nazywamy **implikacją** (wynikaniem), α nazywamy poprzednikiem implikacji a β — następnikiem, oznaczamy je symbolem $\alpha \Rightarrow \beta$.

(iv) zaprzeczenie danemu zdaniu α, oznaczamy je przez $\neg\alpha$.

Ustalimy teraz, kiedy koniunkcja, alternatywa, implikacja i negacja są zdaniami prawdziwymi, a kiedy — fałszywymi.

Koniunkcja. Niech α oznacza zdanie: *liczba* 2 *dzieli liczbę* 12, β — zdanie: *liczba* 3 *dzieli liczbę* 12. Wtedy zdanie $\alpha \wedge \beta$ oznacza zdanie: *liczba* 2 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 3 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 2 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku ze zdań prawdziwych α i β otrzymaliśmy prawdziwe zdanie $\alpha \wedge \beta$. Niech α oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12, β — zdanie: *liczba* 3 *dzieli liczbę* 12. Wtedy zdanie $\alpha \wedge \beta$ oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 3 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 5 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku ze zdania fałszywego α i prawdziwego β otrzymaliśmy nieprawdziwe zdanie $\alpha \wedge \beta$. Jeśli α oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę 12*, β — zdanie: *liczba* 7 *dzieli liczbę* 12, to zdanie $\alpha \wedge \beta$ oznacza zdanie: *liczba* 5 *dzieli liczbę* 12 *i liczba* 7 *dzieli liczbę* 12, tzn. *liczby* 5 *i* 7 *są dzielnikami liczby* 12. W tym przypadku z dwóch zdań fałszywych α i β otrzymaliśmy zdanie fałszywe $\alpha \wedge \beta$.

Te trzy przykłady sugerują prawdziwość następującego prawa: koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa, jeśli oba zdania są prawdziwe. Jeśli jedno ze zdań α i β lub oba te zdania są fałszywe, to również ich koniunkcja $\alpha \wedge \beta$ jest fałszywa. Symbolicznie zapisujemy to prawo tak: $1 \wedge 1 \equiv 1$, $1 \wedge 0 \equiv 0$, $0 \wedge 1 \equiv 0$, $0 \wedge 0 \equiv 0$.

Alternatywa. W matematyce przyjmujemy, że alternatywa $\alpha \vee \beta$ dwóch zdań jest prawdziwa, jeśli choćby jedno z tych zdań jest prawdziwe oraz że alternatywa dwóch zdań fałszywych jest zdaniem fałszywym. Symbolami zapisujemy to tak:

$$1 \vee 1 \equiv 1, \qquad 1 \vee 0 \equiv 1, \qquad 0 \vee 1 \equiv 1, \qquad 0 \vee 0 \equiv 0.$$

Zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 3 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest prawdą; zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 5 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest też prawdą, natomiast zdanie *liczba* 5 *jest dzielnikiem liczby* 12 *lub liczba* 7 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest fałszem.

Wypada tu podkreślić różnicę miedzy potocznym znaczeniem spójnika *lub* a jego matematycznym znaczeniem. W mowie potocznej zazwyczaj używamy spójnika *lub* wtedy, gdy jedno ze zdań jest prawdą, a drugie — fałszem.

Implikacja Zdanie $\alpha \Rightarrow \beta$ uważamy za fałszywe, gdy poprzednik α jest prawdą, a następnik β, — fałszem, tzn. z prawdy fałsz nie wynika. W innych przypadkach implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$ jest prawdziwa, tzn. prawda wynika zarówno z prawdy jak i z fałszu. Symbolicznie zapisujemy to tak:

$$(1 \Rightarrow 0) \equiv 0, \quad (0 \Rightarrow 0) \equiv 1, \quad (1 \Rightarrow 1) \equiv 1, \quad (0 \Rightarrow 1) \equiv 1.$$

Podkreślić trzeba zdecydowanie, że mówimy tu o prawdziwości zdania złożonego $\alpha \Rightarrow \beta$, a nie o prawdziwości zdania β. Na przykład zdanie *jeśli liczba* 4 *jest dzielnikiem liczby* 12*, to liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 12 jest zdanie prawdziwym bo poprzednik i następnik są zdaniami prawdziwymi. Zdanie *jeśli liczba* 2 *dzieli liczbę* 6*, to liczba* 5 *dzieli liczbę* 6 jest fałszem, bo jest prawdą, a następnik — fałszem. Zdanie *jeśli liczba* 2 *dzieli liczbę* 7*, to liczba* 5 *dzieli liczbę* 7 jest prawdziwe, bo poprzednik i następnik są zdaniami fałszywymi. Zdanie *jeśli liczba* 5 *dzieli liczbę* 6*, to liczba* 2 *dzieli liczbę* 6 jest zdaniem prawdziwym, bo poprzednik jest fałszywy, a następnik — fałszywy.

Negacja. Zdanie $\neg\alpha$ jest prawdziwe, jeśli zdanie α jest fałszywe, tzn. zaprzeczenie fałszu jest prawdą, symbolicznie zapisujemy to wzorem $\neg 0 \equiv 1$. Zdanie $\neg\alpha$ jest fałszywe, jeśli zdanie α jest prawdziwe, tzn. zaprzeczenie prawdy jest fałszem: $\neg 1 \equiv 0$.

Ta regułą jest całkowicie zgodna z potocznym rozumieniem zdania *nie jest prawdą, że ...*

Przykład 4.1 Zdanie *nie jest prawdą, że liczba* 2 *dzieli liczbę* 5 jest prawdziwe, bo jest zaprzeczeniem fałszu. Zdanie *nie jest prawdą, ze liczba* 2 *dzieli liczbę* 4 jest zaprzeczeniem prawdy, czyli fałszem. ■

Równoważność. Jeśli ze zdania α wynika zdanie β i ze zdania β wynika zdanie α, to mówimy, że zdania te są równoważne. Piszemy wtedy $\alpha \Leftrightarrow \beta$ lub $\alpha \equiv \beta$. Często zamiast mówić: *zdanie* α *jest równoważne zdaniu* β mówimy, że *zdanie* α *zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdanie* β. Oczywiście prawda jest równoważna prawdzie $(1 \Leftrightarrow 1) \equiv 1$, fałsz — fałszowi $(0 \Leftrightarrow 0) \equiv 1$, natomiast prawda nie jest równoważna fałszowi: $(1 \Leftrightarrow 0) \equiv 0$ i $(0 \Leftrightarrow 1) \equiv 0$.

Przykład 4.2 Liczba 2 dzieli liczbę 28 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba -2 dzieli liczbę 28. Liczba całkowita a dzieli liczbę całkowitą b wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $-a$ dzieli liczbę b. Liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. ■

Wypowiemy teraz kilka podstawowych praw logiki, których będziemy wielokrotnie używać. Lista ta nie będzie pełna, ale Czytelnik — w razie potrzeby — wyprowadzi sobie inne.

Twierdzenie 4.1 (o przechodniości implikacji)
Jeśli ze zdania α wynika zdanie β i ze zdania β wynika zdanie γ, to ze zdania α wynika zdanie γ:

$$\big((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)\big) \Rightarrow \big(\alpha \Rightarrow \gamma\big).$$

Dowód. Implikacja jest fałszywa jedynie wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Jeśli zdanie $\alpha \Rightarrow \gamma$ jest fałszywe, to zdanie α jest prawdziwe, a zdanie γ — fałszywe. Zdanie $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)$ ma być prawdziwe. Oba człony tej koniunkcji muszą być prawdziwe, zatem zdanie β musi być jednocześnie prawdziwe (bo $\alpha \Rightarrow \beta$) i fałszywe (bo $\beta \Rightarrow \gamma$), ale to nie jest możliwe. Dowód został zakończony. ■

Przykład 4.3 Oznaczmy literą α zdanie: $a^3 \neq 0$, literą β

— zdanie: $a \neq 0$, literą γ — zdanie: $a^2 > 0$.

Oczywiście $\alpha \Rightarrow \beta$, tzn. jeśli $a^3 \neq 0$, to $a \neq 0$ i $\beta \Rightarrow \gamma$, czyli: jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$. Stad i z przechodniości implikacji wynika, że $\alpha \Rightarrow \gamma$, czyli: jeśli $a^3 \neq 0$, to $a^2 > 0$. ■

Przykład 4.4 Niech A, B, C będą dowolnymi zbiorami. Niech α oznacza zdanie: $A \subseteq B$, β — zdanie: $B \subseteq C$, a γ zdanie: $A \subseteq C$. Zdanie α można rozumieć w taki sposób: jeśli $p \in A$, to $p \in B$, analogicznie zdania β i γ. Z przechodniości implikacji wynika, że w tej sytuacji jeśli $p \in A$, to $p \in C$, zatem $A \subseteq C$. Innymi słowy z przechodniości implikacji wynika przechodniość zawierania, a to oznacza, że podzbiór podzbioru jest podzbiorem zbioru. ■

Twierdzenie 4.2 (reguła odrywania)
Jeśli α jest zdaniem prawdziwym i ze zdania α wynika zdanie β, to zdanie β jest prawdziwe, czyli $\big(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)\big) \Rightarrow \beta$.

Dowód. Implikacja jest nieprawdziwa jedynie wtedy, gdy jej następnik jest fałszem, a poprzednik prawdą. Musi więc być $\beta \equiv 0$ i $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \equiv 1$, zatem $\alpha \equiv 1$ i $(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv 1$. Wobec tego zdanie α musiałoby być jednocześnie prawdziwe i fałszywe, a to nie jest możliwe.

Przykład 4.5 Niech α oznacza zdanie: *iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczb podzielną przez* 3, β — zdanie: *jeśli a jest liczbą całkowitą, to $a^3 - a$ jest liczbą podzielną przez* 3. Zdanie α jest prawdziwe. Implikacja $\alpha \Rightarrow \beta$ również, bowiem $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$. Z reguły odrywania wynika prawdziwość zdania β. ■

Twierdzenie 4.3
Jeśli ze zdania $\neg\alpha$ wynika fałszywe zdanie β, to zdanie α jest prawdziwe: $\big((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta\big) \Rightarrow \alpha$.

Dowód. Tak jak w poprzednich dowodach sprawdzimy, w jakiej sytuacji implikacja mogłaby być nieprawdziwa. Zdanie α, czyli następnik, musiałoby być fałszywe, a zdanie $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \neg\beta$, czyli poprzednik, — prawdziwe. Oznacza to, że zdanie β musiałoby być fałszywe i implikacja $\neg\alpha \Rightarrow \beta$ — prawdziwa, ale to nie jest możliwe, bo zdanie $\neg\alpha$ jest prawdziwe, a zdanie β fałszywe. ■

Przykład 4.6 Niech α oznacza zdanie : *liczba* 44 *nie jest dzielnikiem liczby* 235, a β — zdanie: *liczba* 2 *jest dzielnikiem liczby* 235. Ze zdania $\neg\alpha$ wynika zdanie β, które jest fałszywe, więc zdanie α jest prawdziwe. ■

Twierdzenie 4.3 jest jednym z najprostszych schematów, wg. których przeprowadzamy tzw. ,,dowody nie wprost", czyli takie, w których z zaprzeczenia tezy wnioskujemy zdanie fałszywe.

Twierdzenie 4.4 (prawa de Morgana)
Zaprzeczeniem alternatywy dwóch zdań jest koniunkcja ich zaprzeczeń: $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$.
Zaprzeczeniem koniunkcji dwóch zdań jest alternatywa ich zaprzeczeń: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$.

Dowód. Udowodnimy pierwsze z wymienionych praw. Strona lewa jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy alternatywa $\alpha \vee \beta$ jest zdaniem fałszywym, a to ma miejsce jedynie wtedy, gdy oba zdania α, β są fałszywe, a ten warunek jest równoważny temu, że koniunkcja ich zaprzeczeń, czyli zdań prawdziwych jest prawdziwa. W taki sam sposób można uzasadnić prawdziwość drugiego prawa de Morgana. ■

Przykład 4.7 Zdanie: *nieprawda, że liczby* 2 *i* 3 *są dzielnikami liczby* 8 jest równoważne zdaniu: 2 *nie jest dzielnikiem liczby* 8 *lub* 3 *nie jest dzielnikiem liczby* 8. Zdanie : *nieprawda, że liczba* 2 *lub liczba* 3 *dzieli liczbę* 8 jest równoważne zdaniu: 2 *nie dzieli liczby* 8 *i* 3 *nie dzieli liczby* 8. ■

Twierdzenie 4.5 (prawo podwójnego przeczenia)
Zaprzeczenie zaprzeczenia zdania α to zdanie α: $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$. ■

Oczywisty dowód tego twierdzenia pomijamy. Podkreślić należy, że w języku polskim podwójne przeczenie oznacza często to samo co pojedyńcze, np. zdanie — ,, nie mam żadnego samochodu" oznacza, że autor tej wypowiedzi nie ma samochodu pomimo, że zostały tu użyte dwa przeczenia: ,,nie" oraz ,,żadnego".

Podane tu przykłady praw logicznych nie wyczerpują listy ważnych tautologii. Są natomiast jednymi z najczęściej stosowanych w matematyce. W zadaniach Czytelnik znajdzie więcej ważnych praw logiki. Można je łatwo udowodnić metodą zerojedynkową, tzn. podstawić 0 oraz 1 na wszystkie możliwe sposoby w miejsce zdań, następnie sprawdzić jaką wartość logiczną ma wtedy zdanie złożone. Jeśli zawsze otrzymujemy 1, to mamy do czynienia z prawem logiki. Takie zdania, które są zawsze prawdziwe, nazywane są również **tautologiami**.

Twierdzenia matematyczne mają postać implikacji. Jej poprzednik nazywany jest założeniem, a następnik — tezą. Dowód twierdzenia, z formalnego punktu widzenia, polega na stosowaniu praw logiki, przy czym za prawdziwe uważane są zdania udowodnione wcześniej oraz definicje. Ponieważ dowodzenie trzeba od czegoś zacząć, więc niektóre zdania uważane są za prawdziwe i niewymagające dowodu. Takie zdania nazywane s pewnikami lub aksjomatami. W teorii liczb rzeczywistych przyjmuje się bez dowodu między innymi, że dodawanie liczb rzeczywistych jest przemienne, tzn. $a+b=b+a$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b. Bez dowodu przyjmujemy też, że $a+(b+c)=(a+b)+c$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a,b,c, czyli łączność dodawania .

Znajomość praw logiki ułatwia sprawdzenie poprawności rozumowania. Zwykle jednak stosujemy na tyle oczywiste prawa logiki, że nie potrzeba się na nie w sposób jawny powoływać. Należy jedna zdawać sobie sprawę z tego, według jakiego schematu logicznego rozumujemy.

Dokładne sformułowanie założeń twierdzeń, pewników, definicji itp. jest ważne — chcemy mieć jakąś gwarancję tego, że rozumując nie dojdziemy do sprzeczności, czyli że nie udowodnimy jednocześnie zdania i jego zaprzeczenia, bo to zmusiłoby nas do uznań wszystkich zdań za prawdziwe. W kłopoty można popaść łatwo, jeśli nie sprecyzujemy, jak można używać słów i jakie jest ich dokładne znaczenie. Powiedzmy, że dowódca rozkazał żołnierzowi–fryzjerowi ogolić wszystkich tych żołnierzy, którzy nie ogolą się sami. Co ma zrobić ów nieszczęśnik? Czy ma się ogolić sam — wtedy ogoli żołnierza, który sam się goli, czy też ma się nie ogolić — wtedy nie ogoli jednego z żołnierzy, którzy nie ogolili się samodzielnie?[4.1]

[4.1] Przykład pochodzi od Bertanda Russella i jednego z nawybitniejszych filozofów i matematyków XIX i XX wieku (1872 – 1970).

Zadania

1. Udowodnić, że niezależnie od wartości logicznych zdań α i β prawdziwe są zdania:

(1) $(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \alpha \vee \beta$;

(2) $\neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$;

te dwa wzory oznaczają, że można zdefiniować alternatywę i koniunkcję za pomocą negacji i implikacji;

(3) $(\neg\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$;

(4) $\big(\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)\big) \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta$;

te dwa wzory oznaczają z kolei, że można zdefiniować implikację i koniunkcję za pomoca negacji i alternatywy.

2. Zdefiniować implikację i alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.

3. Udowodnić, że negacji nie można zdefiniować za pomocą:

(1) alternatywy i koniunkcji;

(2) alternatywy i implikacji;

(3) koniunkcji i implikacji.

4. Zapisać za pomocą symboli logicznych i udowodnić następujące prawa logiki:

(1) jeśli ze zdania α wynika zdanie β i z zaprzeczenia zdania α wynika zdanie β, to zdanie β jest prawdziwe;

(2) jeśli prawdziwa jest alternatywa zdań α i β, to z tego, że ze zdania α wynika zdanie γ i ze zdania β wynika zdanie γ, wynika prawdziwość zdania γ.

5. Napisać zaprzeczenia następujących zdań:

(1) jeśli 7 jest liczbą dodatnią, to -7 jest liczbą ujemną;

(2) jeśli 2 i 5 są liczbami dodatnimi, to z tego, że $x > 2+5$ wynika, że $x > 0$;

(3) jeśli sześcian można ułożyć z cegieł o wymiarach $1\times 2\times 4$, to krawędź sześcianu ma długość różną od 6.

6. Udowodnić, że następujące zdania są tautologiami:

(1) $\alpha \Rightarrow \alpha$; (2) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$;

(3) $\alpha \Rightarrow \big(\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big)$; (4) $\alpha \vee \neg\alpha$;

(5) $[(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge \alpha] \Rightarrow \beta$. (6) $\alpha \Rightarrow [(\beta \wedge \neg\alpha) \Rightarrow \gamma]$;

(7) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$; (8) $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$;

(9) $[(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha] \Rightarrow \alpha$; (10) $(\neg\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$;
(11) $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$; (12) $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$;
(13) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Leftrightarrow [\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$;
(14) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Rightarrow [(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$.

7. Z jakich praw logiki korzystamy w następujących rozumowaniach:

(a) Jeśli x jest liczbą nieparzystą, to liczba x^3 też jest nieparzysta. Suma dwu liczb nieparzystych jest parzysta, zatem jeśli x jest liczbą nieparzystą, to liczba $x^3 + x$ jest parzysta. Suma liczby parzystej i nieparzystej jest nieparzysta, zatem jeśli liczba x jest nieparzysta, to liczba x^3+x+1 jest nieparzysta. Jeśli liczba x jest parzysta, to x^3 też jest parzysta, więc liczba $x^3 + x + 1$ jest nieparzysta. Zarówno z założenia, że liczba x jest parzysta, jak i z założenia, że liczba x jest nieparzysta wynika, że liczba x^3+x+1 jest nieparzysta. Wynika stąd, że liczba $x^3 + x + 1$ jest nieparzysta dla każdej liczby całkowitej x.

(b) Niech a będzie liczbą naturalną, która nie jest podzielna przez 5. Gdyby jakieś dwie liczby spośród a, $2a$, $3a$, $4a$ dawały taką samą resztę z dzielenia przez 5, to po odjęciu mniejszej od większej otrzymalibyśmy liczbę podzielną przez 5, a to jest niemożliwe, bo żadna z liczb a, $2a$, $3a$ nie dzieli się przez 5. Oznacza to, że liczby a, $2a$, $3a$, $4a$ dają różne reszty z dzielenia przez 5. Wobec tego resztami tymi są liczby 1, 2, 3, 4 być może w innej kolejności. Wynika stąd, że liczby $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot 4a$ i $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ dają z dzielenia przez 5 tę samą resztę, więc ich różnica, czyli liczba $4!a^4 - 4! = 4!(a^4 - 1)$ jest podzielna przez 5. Ponieważ liczba pierwsza 5 nie dzieli liczby $4!$, zatem dzieli liczbę $a^4 - 1$. ■