Równania różniczkowe, egzamin 6 czerwca 2005

Upragniony przez Panie i Panów koniec nastąpi o godzinie 12:00

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana **CZYTELNIE** *w LEWYM GÓRNYM ROGU nazwiskiem i imieniem piszącego i numerem jego indeksu.*

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone — włączone urządzenie wyłącza studenta, przy którym się znajduje, z egzaminu!

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystko należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach oraz na te, które potrafią Państwo udowodnić na egzaminie ustnym.

---

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

2. Niech $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Znaleźć rozwiązanie ogólne układu $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

3. Rozwiązać równania $y'(t) = \frac{2}{1+t^2}y(t) + 2(t-1)$ oraz $x'(t) + \frac{1}{1+t^2}x(t) = (1-t)x(t)^3$.

4. Znaleźć funkcję x zmiennej t, dla której $x^{(5)} + 5x^{(4)} + 11x^{(3)} + 13x'' + 8x' + 2x = 2e^{-t}(\cos t + \sin t)$ oraz $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$, $x^{(3)}(0) = -12$, $x^{(4)}(0) = 28$.

5. Znaleźć wszystkie punkty równowagi (osobliwe) układu

$$\begin{cases} x' &= ax - bxy; \\ y' &= -cy + dxy; \end{cases} \qquad \text{gdzie } a,b,c,d > 0.$$

Wyjaśnić, czy któryś z nich jest stabilny w sensie Lapunowa, a jeśli tak, to czy jest też stabilny asymptotycznie i czy układ ma całkę pierwszą (różną od stałej) w jakimś niepustym zbiorze otwartym.

Po godzinie 10^{58} można i należy zająć się zadaniami T1 i T2.

a wcześniej za nie brać się nie należy chyba, że już nic innego do zrobienia nie zostało!

T1. Zdefiniować rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego. Sformułować i udowodnić twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania $\mathbf{x}' = f(t,x)$.

T2. Wykazać, że jeśli $f\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją klasy C^1, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i części rzeczywiste wartości własnych przekształcenia liniowego $Df(\mathbf{0})$ są ujemne, to istnieje liczby $\delta > 0$ i $C > 0$ takie, że jeśli $\|\mathbf{p}\| < \delta$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}$, $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, to dla każdego $t > 0$ zachodzi nierówność $\|\mathbf{x}(t)\| \le C\delta$ oraz $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

D. *(dodatkowe, dla tych którym jeszcze za mało).* $H\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest funkcją klasy* C^2. *Rozważamy układ równań* $x' = \frac{\partial H}{\partial y}$, $y' = -\frac{\partial H}{\partial x}$. *Załóżmy, że* grad $H(\mathbf{p}) = 0$. *Wykazać, że punkt* **p** **NIE** *jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa.*