Równania różniczkowe, zadania, część 6

Kilka zadań dla oprzytomnienia po Juvenaliach

51. Wykazać, że istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ klasy C^∞, której jedynym miejscem zerowym jest punkt $\mathbf{0} = (0,0)$ taka, że każde rozwiązanie równania $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ jest określone na całej prostej i że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ a przy tym punkt $\mathbf{0}$ **nie** jest stabilny w sensie Lapunowa. Czy f może być funkcją wymierną dwu zmiennych, tzn. taką, której każda współrzędna jest ilorazem wielomianów dwu zmiennych?

52. Wyjaśnić, czy punkt $\mathbf{0} = (0,0)$ jest stabilnym rozwiązaniem układu

(a) $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -2y; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = 2y; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = -3x, \\ y' = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = -4x, \\ y' = -y^3; \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x^3; \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x^3(1+y^2); \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x' = -y\cos x, \\ y' = \sin x. \end{cases}$

53. Wyjaśnić, czy punkt $\mathbf{0} = (0,0)$ jest stabilnym rozwiązaniem układu

(a) $\begin{cases} x' = -x + y + 2xy, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2x, \\ y' = 3x^2 - x + 3y; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = e^{2+2y} - \cos(3x), \\ y' = \sqrt{4+8x} - 2e^y; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \mathrm{tg}(y-x), \\ y' = 2^y - 2\cos(\frac{\pi}{3} - x); \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = x^3 - y, \\ y' = x + y^3; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = y - x + xy, \\ y' = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$

54. Wykazać, że jeśli punkt $\mathbf{p}$ jest asymptotycznie stabilny dla układu $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, to każda całka pierwsza tego układu jest funkcją stałą w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$. Czy teza pozostanie prawdziwa, jeśli punkt $\mathbf{p}$ będzie stabilny w sensie Lapunowa?

Rozwiązaniem równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ nazywamy parę funkcji x, y zmiennej t, dla której $P(x,y)x' + Q(x,y)y' = 0$. *Całką pierwszą* równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ nazywamy funkcję H zmiennych x, y, która jest stała na każdym rozwiązaniu. Jeśli wektor $[P,Q]$ jest różny od $[0,0]$ w punkcie (x_0, y_0), a funkcje P, Q są klasy C^1, to istnieje niezerowe rozwiązanie równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ spełniające warunek początkowy $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Jeśli funkcja H klasy C^1 jest całką pierwszą równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, to w punkcie (x_0, y_0) wektory $[P,Q]$ i $\mathrm{grad}\, H$ są w punkcie (x_0, y_0) równoległe. Jeśli np. $\frac{\partial H}{\partial x} = \mu P$ i $\frac{\partial H}{\partial y} = \mu Q$ dla pewnej funkcji μ o wartościach rzeczywistych w pewnym obszarze, to H jest w tym obszarze całką pierwszą równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, funkcję μ nazywamy wtedy czynnikiem całkującym równania $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$.

55. Znaleźć jakąś (niestałą) całkę pierwszą równania

(a) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$; (b) $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0$;

(c) $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$; (d) $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$;

(e) $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos(2y)-1}\,dy = 0$; (f) $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$;

(g) $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$; (h) $x^2y^2\,dy + (xy^3 - 1)\,dx = 0$;

($\sqrt{-1}$) $y^2\,dx + \big(xy + \mathrm{tg}(xy)\big)\,dy = 0$; (j) $(x^2 + 3\ln y)y\,dx - x\,dy = 0$;

(k) $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0$; (l) $(x^2y^3 + y)\,dx + (x^3y^2 - x)\,dy = 0$