

Równania różniczkowe, zadania, część 4

41. Dla jakich liczb a, b wszystkie rozwiązania równania $x'' + ax' + bx = 0$ są funkcjami ograniczonymi na całej prostej?
42. Dla jakich liczb a, b wszystkie rozwiązania równania $x'' + ax' + bx = 0$ mają granicę 0 przy $x \rightarrow \infty$?
43. Dla jakich a, b co najmniej jedno niezerowe rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ ma granicę 0 przy $x \rightarrow \infty$?
44. Dla jakich liczb a, b każde niezerowe rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ jest funkcją, której wartość bezwzględna rośnie na pewnej półprostej $[a, \infty)$?
45. Dla jakich liczb a, b każde rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ ma nieskończenie wiele pierwiastków?
46. Dla jakich liczb a, b każde rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ spełnia warunek $x(t) = o(e^{-t})$ przy $t \rightarrow \infty$?
47. Dana jest liczba $b > 0$. Znaleźć liczbę a tak, by rozwiązanie równania $x'' + ax' + bx = 0$ spełniające warunki $x(0) = 1, x'(0) = 0$ dążyło do 0 przy $t \rightarrow \infty$ możliwie szybko?
48. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona. Liczby λ_1, λ_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego równania $x'' + ax' + bx = f(t)$ i $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Znaleźć rozwiązanie ograniczone (na całej prostej) x_0 równania $x'' + ax' + bx = f(t)$. Wykazać, że jeśli funkcja f jest okresowa, to również x_0 jest funkcją okresową. Wykazać, że (niezależnie od okresowości) zachodzi $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_0(t)] = 0$ dla dowolnego rozwiązania x .